This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

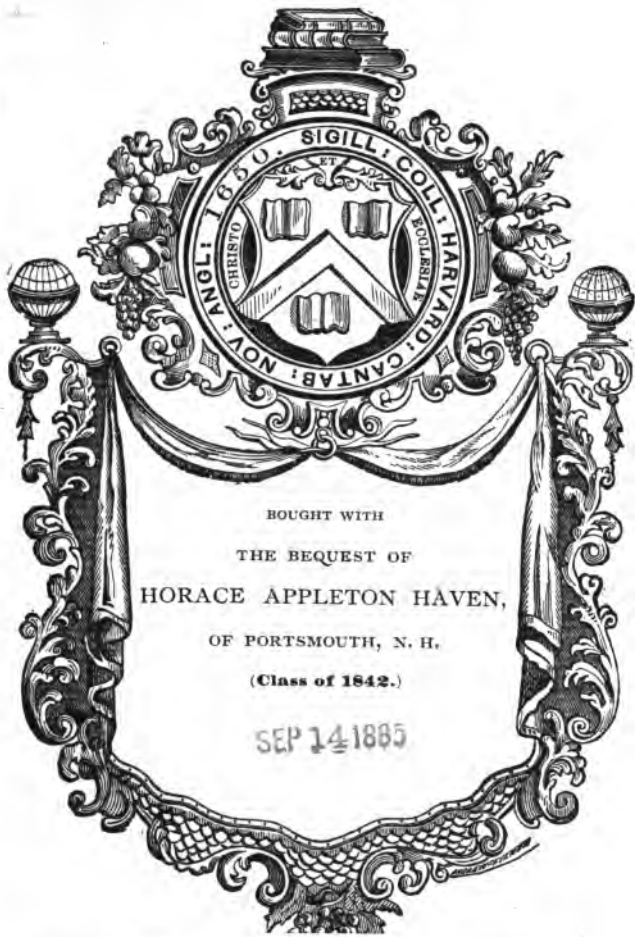
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 2378.82



BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
SEP 14 1885

SCIENCE CENTER LIBRARY

Ueber conjugirte binäre Formen.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät hiesiger Universität

zur Erlangung der Doctorwürde

am Dienstag, den 24. October 1882, 11 Uhr Vormittags

im Musiksaale der Universität

öffentlich vertheidigen wird

Otto Schlesinger

gegen die Herren:

Alexander Adler, Dr. phil., **Max Hamburger**, Cand. math.

BRESLAU.

TH. SCHATZKY'S BUCHDRUCKEREI.

1882.

~~VI. 3360~~
Math 2378.82.

SEP 14 1885

Herrn

Professor Dr. J. Rosanes

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Einleitung.

Nach einer von Herrn Prof. Rosanes eingeführten Bezeichnung[1]) nennt man 2 binäre Formen des nten Grades:

$$a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n \equiv a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$
$$a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n \equiv a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$

„zu einander conjugirt", sobald die in den Coefficienten beider Formen lineare Invariante:

$$(aa)^n = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} \pm \ldots + (-1)^n a_n a_0$$

den Werth Null hat. Vermöge dieser Beziehung gehören zu jeder binären Form nten Grades unendlich viele conjugirte Formen, welche alle derselben n-gliedrigen linearen Gruppe angehören, wenn allgemein unter einer p-gliedrigen Gruppe die Gesammtheit der Formen verstanden wird, welche sich aus gewissen p Formen linear zusammensetzen lassen. In gleicher Weise bilden die Formen, welche gleichzeitig zu q gegebenen binären Formen conjugirt sind, eine $(n + 1 - q)$-gliedrige lineare Gruppe; da indessen jedes Element der Letzteren zu jeder Form conjugirt ist, welche aus den q gegebenen linear zusammengesetzt werden kann, so erkennt man,

[1]) „Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen." Crelle's Journal. Bd. 76.

„dass jeder q-gliedrigen Gruppe von Formen nten Grades eine $(n + 1 - q)$-gliedrige als deren „conjugirte“ derart gegenübersteht, dass jede Form der einen zu jeder Form der andern conjugirt ist“. Durch diese Gegenüberstellung ist zugleich ein Mittel gegeben, jede lineare Identität zwischen binären Formen durch die Beziehung des Conjugirtseins zu interpretiren und umgekehrt die letztere auf die Existenz gewisser linearer Identitäten zurückzuführen, da die Thatsache, dass eine Form nten Grades einer p-gliedrigen Gruppe angehört, zusammenfällt damit, dass sie zu einer bestimmten $(n + 1 - p)$-gliedrigen conjugirt ist.

An diese algebraischen Definitionen knüpfen sich, sobald man irgend eine geometrische Repräsentation der binären Formen (z. B. als Punktgruppen einer unicursalen Curve) ins Auge fasst, 2 Reihen von Aufgaben, nämlich

1) die Aufgabe, zu einer oder mehreren gegebenen Formen die conjugirten zu construiren;
2) die Aufgabe, alle Elemente einer q-gliedrigen Gruppe zu construiren, welche durch q ihrer Formen gegeben ist.

Während die Lösung dieser Aufgaben für Formen 2ten Grades; d. h. die constructive Herstellung harmonischer und involutorischer Punktepaare seit langer Zeit bekannt ist, haben von den übrigen darin geforderten Constructionen bisher nur wenige eine Erledigung gefunden. Für Formen 3ten Grades, auf einer cubischen Raumcurve als Träger, sind die Aufgaben (1) und (2) von Herrn Sturm[2]) gelöst worden; anderseits hat Herr Serret[3]), indem er sich der Darstellung auf einem Kegelschnitt bediente, die Lösung der Aufgabe gegeben, alle Formen zu construiren, welche sich aus 4 gegebenen Formen des vierten Grades linear zusammensetzen lassen.

Im Nachfolgenden soll versucht werden, diejenigen der Aufgaben (1) zu behandeln, welche bei der Repräsentation der Formen auf einem Kegelschnitte einerseits, auf einer Raumcurve dritter Ordnung anderseits, eine lineare Lösung zulassen; ich werde mich also insbesondere mit der folgenden Aufgabe

[2]) Crelle's Journal. Bd. 86.
[3]) Comptes rendus 87, 2.

beschäftigen: „Wenn auf einer ebenen Curve 2ter Ordnung (resp. einer Raumcurve dritter Ordnung) als Träger eine Form pten Grades durch die sie repräsentirenden p Punkte gegeben ist, so sollen alle zu ihr conjugirten Formen construirt werden."

Da indessen alle diese conjugirten Formen eine p-gliedrige Gruppe bilden, so wird die Ausführung der letztgenannten Constructionen zugleich einen Einblick in den Zusammenhang gewähren, der zwischen irgend $(p + 1)$ Formen einer p-gliedrigen Gruppe besteht, und obwohl dieser Einblick nicht ausreicht, um die entsprechenden Aufgaben (2) allgemein zu erledigen, so wird er doch erkennen lassen, in welcher Richtung die Lösung derselben zu suchen ist.

Bevor ich an den Gegenstand meiner Untersuchung herantrete, will ich eine Reihe von Sätzen und Definitionen zusammenstellen, deren ich mich weiterhin bedienen werde.

I. Wenn 2 binäre Formen nten Grades zu einander conjugirt sind, so lässt sich die eine derselben aus den nten Potenzen der Linearfactoren der andern linear zusammensetzen.[4])

II. Eine Form ungeraden Grades ist zu sich selbst conjugirt. — Jeder Linearfactor einer Form nten Grades f stellt zur nten Potenz erhoben, eine zu f conjugirte Form dar.[4])

III. Liegt eine binäre Form nten Grades $a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$ und eine ebensolche pten Grades a_x^p vor, und ist $p < n$, so versteht man unter der Polare von a_x^p in Bezug auf a_x^n die binäre Form derjenigen Punkte, deren (n—p)te Polare in Bezug auf die Form nten Grades zu der Form pten Grades conjugirt ist. Diese Polare wird durch $(a\,\alpha)^p a_x^{n-p}$ dargestellt.[5])

IV. Zwei binäre Formen ungleichen Grades nennt man „zu einander apolar", wenn die Form des höheren Grades

[4]) Rosanes. l. c.

[5]) Reye Crelle's Journal. Bd. 78.

zu jeder Form conjugirt ist, welche die des niederen Grades als Faktor enthält.[6]) Sollen demnach a_x^n und a_x^p (für $n > p$) zu einander apolar sein, so muss $(a\,\alpha)^p a_x^{n-p}$ für jedes x verschwinden; mit Beziehung auf III. ergiebt sich demnach der Satz:

V. Zwei binäre Formen sind dann und nur dann apolar, wenn die Polare der Form des niederen (pten) in Bezug auf die Form des höheren (nten) Grades identisch verschwindet, oder, was dasselbe sagt, wenn die (n — p)te Polare jedes Punktes in Bezug auf die Form des nten Grades zu der Form pten Grades conjugirt ist.

Da ferner, wenn wir a_x^n als fest gegeben ansehen, die Identität $(a\alpha)^p a_x^{n-p} \equiv 0$ mit $(n-p+1)$ Bedingungsgleichungen für die $(p+1)$ Coefficienten von α_x^p aequivalent ist, so folgt:

VI. Alle Formen pten Grades, welche zu einer Form nten Grades (für $n > p$) apolar sind, bilden eine $[(p+1) - (n-p+1)] = [2p-n]$-gliedrige Gruppe. Ebenso bilden alle Formen pten Grades, welche zu q Formen nten Grades gleichzeitig apolar sind, eine $[(p+1) - q\,(n-p+1)]$-gliedrige Gruppe.

VII. Der Kürze halber soll weiterhin eine p-gliedrige Gruppe von binären Formen des nten Grades als eine G_p^n von Formen bezeichnet werden. Wenn nunmehr eine bestimmte G_p^n und irgend eine Form iten Grades c_x^i gegeben ist (wobei $i < n$ sein soll), so kann man nach denjenigen Formen (n — i)ten Grades fragen, welche mit c_x^i multiplicirt ein Element der G_p^n liefern. Man sieht sofort, dass alle solche Formen eine bestimmte G_{p-i}^{n-i} bilden, von der wir sagen wollen, dass sie in der G_p^n „enthalten" sei, und dass sie innerhalb der G_p^n der Form c_k^i oder auch den i Punkten dieser Form zugehört.

VIII. Der Beziehung, dass 2 binäre Formen zu einander conjugirt sind, entspricht im ternären (resp. quaternären) Gebiet einer Relation zwischen einer Ordnungs- und einer

[6]) Reye, Crelle's Journal. Bd. 78.

Klassencurve (resp. Fläche). Man nennt die Curven (Flächen) $a_x^n = 0$ $u_\alpha^n = 0$ „zu einander conjugirt“, sobald die Invariante a_α^n verschwindet. Irgend einer p-gliedrigen Gruppe von Curven nter Ordnung (resp. Klasse) steht eine $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1.2.} - p\right]$-gliedrige Gruppe von Curven nter Klasse (oder Ordnung) als „conjugirt“ gegenüber, derart, dass jede Curve der einen zu jeder Curve der andern Gruppe conjugirt ist.[7])

In demselben Sinne besitzt jede p = gliedrige Gruppe von Flächen nter Ordnung (resp. Klasse) eine

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.} - p\right]\text{-}$$

gliedrige Gruppe von conjugirten Flächen nter Klasse (resp. Ordnung).

IX. Ist eine Curve (resp. Fläche) nter Klasse $u_\alpha^n = 0$ gegeben und ist ein System von n Graden (resp. Ebenen), als Curve (Fläche) nter Ordnung aufgefasst, zu $u_\alpha^n = 0$ conjugirt, so bezeichnet man diese n Geraden (resp. Ebenen) als ein „conjugirtes n-Seit (resp. n-Flach)“ der Curve, resp. Fläche[7]). Die gemischte Polare von irgend $(n-1)$ Geraden (Ebenen) eines solchen n-Seits (n-Flachs) in Bezug auf $u_\alpha^n = 0$ ist ein Punkt, der auf der nten Geraden (resp. Ebene) gelegen ist.

X. Hat man eine Curve (Fläche) nter Klasse $u_\alpha^n = 0$ und eine Curve (Fläche) pter Ordnung $a_x^p = 0$, so versteht man, falls $p < n$ ist, unter der Polare von $a_x^p = 0$ in Bezug auf $u_\alpha^n = 0$ die Curve (resp. Fläche) (n — p)ter Klasse $a_\alpha^p u_\alpha^{n-p} = 0$, d. h. den Ort der Geraden (Ebenen), deren (n — p)te Polare in Bezug auf $a_\alpha^n = 0$ zu $a_x^p = 0$ conjugirt ist.[8]) Ist $p > n$, so ist analog $a_\alpha^p\, a_x^{p-n} = 0$ die Polare von $u_\alpha^n = 0$ in Bezug auf $a_x^p = 0$.

XI. Man nennt eine Ordnungs- und eine Klassencurve von ungleicher Ordnungs- resp. Klassenzahl „zu einander apolar“, wenn die Curve der höheren Zahl zu allen Curven

[7]) Rosanes l. c.
[8]) Reye l. c.

conjugirt ist, welche die Curve der niederen Zahl als Theil enthalten.[9]) Sollen demnach $a_x^p = 0$ und $u_\alpha^n = 0$ für $n > p$ zu einander apolar sein, so muss die Gleichung $a_\alpha^p \, u_\alpha^{n-p}$ identisch in u erfüllt werden, d. h.

XII. Damit eine Curve pter Ordnung C^p zu einer Curve nter Klasse K^n für $n > p$ apolar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Polare von C^p in Bezug auf K^n identisch verschwinde.

Was den Inhalt der folgenden Abschnitte anbetrifft, so bemerke ich, dass die §§. 1—6 die conjugirten binären Formen unter der Voraussetzung betrachten, dass ein Kegelschnitt als Träger derselben gewählt sei. Die Sätze, welche für diesen Fall die Lösung der oben fixirten Aufgaben ermöglichen, gestatten eine sehr ausgedehnte Erweiterung und führen so auf eine Reihe von curventheoretischen Sätzen, welche ich in §. 7 zusammengestellt und bewiesen habe. Der übrige Theil ist der Betrachtung der binären Formen auf der Raumcurve dritter Ordnung gewidmet.

---

§ 1.

Ich gehe nunmehr dazu über, die binären Formen auf einem Kegelschnitt zu betrachten: Bekanntlich kann jede nicht zerfallende Curve 2ter Ordnung durch geeignete Wahl des Coordinatensystems in der Gleichungsform $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$ dargestellt werden, und ich werde daher für das Folgende den Kegelschnitt dieser Gleichungsform als Grundkegelschnitt S wählen. Zu jedem Punkte x $(x_1 \; x_2 \; x_3)$ von S gehört alsdann ein Parameterpaar $\varkappa_1 \; \varkappa_2$ derart, dass die Relation:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varkappa_1^2 : \varkappa_1 \, \varkappa_2 : \varkappa_2^2 \qquad (1)$$

besteht. Der Punkt x soll daher auch als Punkt $\varkappa$ bezeichnet werden.

---

[9]) Reye l. c.

Trifft eine Geraden u $(u_1\ u_2\ u_3)$ den Kegelschnitt in den Punkten $\lambda\ \mu$, so sind $(\lambda_1\ \lambda_2)$ und $(\mu_1\ \mu_2)$ Wurzelpaare der Gleichung:

$$u_1 x_1^2 + u_2\ x_1 x_2 + u_3\ x_2^2 = 0$$

und mithin sind die Grössen $u_1\ u_2\ u_3$ den elementar-symmetrischen Functionen von $\lambda\ u$ proportional, welche wir der Reihe nach mit $(\lambda\ \mu)_1\ (\lambda\ \mu)_2\ (\lambda\ \mu)_3$ bezeichnen, so dass wir schreiben können:

$$\begin{aligned} u_1 : u_2 : u_3 &= \lambda_2 \mu_2 : -(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) : \lambda_1 \mu_1 \\ &= (\lambda\ \mu)_1 : (\lambda\ \mu)_2 : (\lambda\ \mu)_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Daraus folgt, dass jede symmetrische homogene Function von $\lambda\ \mu$ vermöge (2) in eine homogene Function von u übergeführt werden kann, d. h. jede solche Function $f(\lambda\mu) = f(\mu\lambda)$ kann als linke Seite der Gleichung einer bestimmten Klassen-Curve angesehen werden. $f(\lambda\ \mu) = 0$ stellt alsdann die Bedingung dar, welche zwischen 2 Punkten von S erfüllt sein muss, damit ihre Verbindungslinie die betreffende Curve tangirt. Diese Art, die Gleichung einer Klassencurve darzustellen, soll auf eine besondere Gattung von Curven Anwendung finden:

Nach XI. der Einleitung ist nämlich eine Curve nter Klasse K^n zu der Curve 2ter Ordnung S apolar, sobald alle Curven nter Ordnung, welche S als Theil enthalten, zu K^n conjugirt sind. Ich will im Folgenden die Klassencurven dieser Eigenschaft näher untersuchen.

Wenn $c_x^n = 0$ eine Curve nter Ordnung sein soll, welche S als Theil enthält, so ist nach (1) nothwendig und hinreichend, dass:

$$(c_1 x_1^2 + c_2 x_1 x_2 + c_3 x_2^2)^n = 0 \qquad (3)$$

sei für jedes $x_1\ x_2$. Aus dieser Identität (3) können andere durch Differentiation nach x resp. durch Polarenbildung abgeleitet werden. Eine solche sei durch:

$$f(c_1\ c_2\ c_3,\ x_1\ x_2) \equiv 0 \qquad (4)$$

dargestellt, wo f die Symbole c nur zum nten Grade enthält. Setzt man nun auf der linken Seite von (4):

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda_2 \mu_2 = (\lambda\ \mu)_1 \\ c_2 &= -(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) = (\lambda\ \mu)_2 \\ c_3 &= \lambda_1 \mu_1 = (\lambda\ \mu)_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

so stellt das Resultat, gleich Null gesetzt:

$$f\,[(\lambda\ u)_1\ (\lambda\ \mu)_2\ (\lambda\ \mu)_3\ x] = 0 \qquad (6)$$

für jeden Werth von x eine Klassencurve dar, die in Folge der Gleichung (4) zu jeder die Gleichung (3) erfüllenden Curve $c_x^n = 0$ conjugirt, d. h. zu S apolar ist. Wir erhalten also auch eine zu S apolare Curve, wenn wir die Potenzen und Producte von $x_1\ x_2$ durch irgend welche Grössen, oder, was dasselbe ist, wenn wir $x_1\ x_2$ durch irgend welche Symbole binärer Formen ersetzen.

Die Gleichung (6) lässt sich jedoch noch einfacher herstellen, denn wir hatten sie erhalten, indem wir (3) nach x differentiirten und dann für die c die Substitution (5) anwandten. Da jedoch die Symbole c durch die Differentiation nicht berührt werden, so kann man umgekehrt zuerst die Substitution (5) und dann die Differentiation ausführen. Durch Einführung von (5) geht aber die linke Seite von (3) über in:

$$(x\ \lambda)^n\ (x\ \mu)^n$$

und wir erhalten demnach den für das Folgende fundamentalen *Satz*:

1. Wenn man aus $(k\lambda)^n\ (x\mu)^n = \varphi\,(x\ \lambda\ \mu)$ *durch Differentiation nach* x *irgend eine Form* $f\,(x\ \lambda\ \mu)$ *abgeleitet hat, so stellt* $f\,(x\ \lambda\ \mu) = 0$ *(sobald* $u_i = (\lambda\ \mu)_i$ *gesetzt wird) für jeden wirklichen oder symbolischen Werth von* x *eine zu* S *apolare Curve dar.*

Eine derartige Curve wird demnach insbesondere erhalten, wenn man in $\varphi\,(x\ \lambda\ \mu)$ selbst die x durch irgend welche Symbole ersetzt. Hat man also eine binäre Form 2nten Grades a_x^{2n} und führt man

$$x_1 = a_2 \quad x_2 = -a_1$$

in $(x\lambda)^n\ (x\mu)^n$ ein, so ergiebt sich:

$$a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0 \qquad (7)$$

als Gleichung einer zu S apolaren Curve nter Klasse. Indem man $\lambda = \mu = x$ setzt, erhält man aus (7) eine Gleichung für diejenigen Punkte x des Kegelschnitts, deren Tangenten die Curve (7) berühren und man erkennt so, dass diese Curve die 2n Tangenten in den Punkten der binären Form a_x^{2n} berührt.

Nun ist aber sofort ersichtlich, dass eine Curve n ter Klasse $u_a^n = 0$, welche zu S ($s_x^2 = 0$) apolar sein soll, durch 2n weitere Bedingungen festgelegt ist; denn die Forderung der Apolarität besteht darin, dass die Gleichung:

$$s_a^2 \, u_a^{n-2} = 0 \qquad (8)$$

in Bezug auf u identisch stattfinde, und diese Forderung ist daher äquivalent mit

$$\frac{(n-2+1)\,(n-2+2)}{2} = \frac{(n-1)\,n}{2}$$

linearen Bedingungsgleichungen. Diese, zusammen mit den 2n weiteren, geben aber in der That $\frac{n\,(n+3)}{2}$ Bedingungen, d. h. so viele als zur Bestimmung einer Curve n ter Klasse erforderlich sind.

Wenn wir insbesondere die Forderung stellen, dass eine Curve n ter Klasse zu S apolar sein und die Tangenten t_1 $t_2 \ldots t_{2n}$ in den Punkten $x_1 \; x_2 \ldots x_{2n}$ der binären Form a_x^{2n} berühren soll (wobei ein i - facher Punkt der Form durch i unendlich benachbarte Punkte ersetzt werden kann), so haben wir $\frac{n\,(n+3)}{2}$ lineare Bedingungen, welche niemals abhängig sein können, wir immer auch a_x^{2n} beschaffen sein mag. Denn wären sie abhängig, so müsste jede apolare Curve n ter Klasse, die $t_1 \; t_2 \ldots t_{2n-1}$ berührt, auch t_{2n} zur Tangente haben. Ist aber b_k^{2n} die binäre Form der 2n Punkte $x_1 \; x_2 \ldots x_{2n-1} \; x$, wo x ein beliebiger von x_{2n} verschiedener Punkt ist, so stellt $b_\lambda^n \; b_\mu^n = 0$ eine Curve jener Art dar, die aber t_{2n} nicht berührt. Wir sehen also[10]):

dass es stets eine und nur eine Curve n ter Klasse giebt, welche zu einem Kegelschnitt S apolar ist und 2n beliebig gegebene Tangenten desselben berührt. Ist a_x^{2n} die binäre Form der 2n Berührungspunkte, so bezeichne ich jene Curve als „beigeordnete“ Curve der Form a_x^{2n},

oder mit anderen Worten:

Ist eine Curve n ter Klasse zu S apolar und ist a_x^{2n}

[10]) Lindemann, Bulletin de la Soc. Math. de France V.

die binäre Form der 2n Punkte von S, deren Tangenten sie berühren, so ist ihre Gleichung $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ (für $(\lambda\,\mu)_i = u_i$).

Es liegt hier nahe, sich nach einem Kriterium umzusehen, welches an einer symmetrischen Form $f\ (\lambda\ \mu)$ direct erkennen liesse, ob $f\ (\lambda\ \mu) = 0$ zu S apolar ist. Ich will ein solches ableiten, obwohl ich späterhin nur vorübergehend Gebrauch davon machen werde; man wird auf dasselbe geführt, sobald man versucht, die bekannte Reihenentwicklung für Functionen mit 2 Reihen von binären Veränderlichen auf $a_\lambda^n\ a_\mu^n$ anzuwenden. Indem man nämlich die dabei zu benutzenden Operationen[11]):

$$Df = \frac{1}{n}\left\{\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\,\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}\,\mu_2\right\}$$

$$\Delta Df = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\partial Df}{\partial \mu_1}\,\lambda_1 + \frac{\partial Df}{p\,\mu_2}\,\lambda_2\right\}$$

$$\Omega f = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_1\,\partial\mu_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda_2\,\partial\mu_1}\right\}$$

an $f = a_\lambda^n\ a_\mu^n$ ausführt, so bemerkt man, dass

$$f = \Delta Df \tag{9}$$

ist und mithin wegen der Relation $f = \Delta\mathrm{D}f + \frac{n}{n+1}\,(\lambda\,\mu)\,\Omega f$ auch:

$$\Omega f = 0 \tag{10}$$

ist für jedes λ und μ. Wir sehen also,

dass für die linke Seite $f\ (\lambda\ \mu)$ jeder zu S apolaren Curve die gleichbedeutenden Relationen (9) und (10) gelten.

Es besteht aber auch die Umkehrung:

Ist $\Delta Df = f$, so ist $f\ (\lambda\,\mu) = 0$ eine zu S apolare Curve; denn setzen wir

$$f\ (\lambda\,\mu) = u_\alpha^n = \left(\sum_1^3 a_i\ (\lambda\,\mu)_i\right)^n$$

so ist:

$$Df = [\Sigma\ a_i\ (\lambda\,\mu)_i]^{n-1}\ [\Sigma\ a_i\ (\mu\,\mu)_i]$$

$$(n+1)\,\Delta Df = (n-1)\ [\Sigma\ a_i\ (\lambda\,\mu)_i]^{n-2}\,[\Sigma\,a_i\,(\lambda\,\lambda)_i]\ [\Sigma\,a_i\,(\mu\,\mu)_i] + 2\ [\Sigma\,a_i\,(\lambda\,\mu)_i]^n$$

---

[11]) Clebsch, Binaere Formen. S. 15.

Also, weil $\Delta Df = f$ und $[\Sigma a_i (\lambda\mu)_i)^n] = f$ ist, so gilt:

$$f = [\Sigma a_i (\lambda\mu)_i]^{n-2} [\Sigma a_i (\lambda\lambda)_i] [\Sigma a_i (\mu\mu)_i] \quad (11)$$

als eine in λ und μ identische Gleichung: Wenn nun t irgend eine Tangente von $f - u_\alpha^n = 0$ ist, welche S in den Punkten $\lambda\mu$ schneidet, und welche demnach die Coordinaten $(\lambda\mu)_i$ besitzt, so wird die rechte Seite von (11) durch λ und μ annulirt. Da aber die 3 Grössen $(\lambda\lambda)_i = l_i$ die Coordinaten der in λ an S gezogenen Tangente l vorstellen und die Bedeutung von $(\mu\mu)_i = m_i$ analog ist, so folgt, dass das Geradenpaar $l\,m$ zur conischen Polare von t in Bezug auf f (welche K heissen möge) conjugirt ist, oder was dasselbe besagt, dass die durch den Schnittpunkt von l und m an K gezogenen Tangenten $t_1\ t_2$ ein conjugirtes Geradenpaar von S bilden. Der erwähnte Schnittpunkt ist offenbar Pol von t in Bezug auf S; mithin bilden $t\ t_1\ t_2$ ein Polardreiseit von S. Alle drei Seiten desselben berühren die Curve K, $t_1\ t_2$ nämlich nach Construction, und t weil es Tangente von f ist und als solche von seiner Polarcurve K berührt wird. Die Curve 2ter Klasse K ist demnach zu der Curve 2ter Ordnung $S = s_x^2 = 0$ conjugirt; d. h. die Gleichung $t_\alpha^{n-2} s_\alpha^2 = 0$ besteht für jedes t, für welches $t_\alpha^n = 0$ ist, und weil die letztere Gleichung von höherem Grade in t ist, als die erste, so gilt $t_\alpha^{n-2}\ s_\alpha^2 = 0$ für jedes t überhaupt; oder mit anderen Worten: $f = u_\alpha^n = 0$ ist zu S apolar, wie behauptet wurde.

§ 2.

Aus der Identität:

$$a_\lambda^n\ a_\mu^n = [a_1^2\ (\lambda\mu)_3 - a_1\ a_2\ (\lambda\mu)_2 + a_2^2\ (\lambda\mu)_1]^n$$

folgt, dass die Gleichung der der Form a_x^{2n} „beigeordneten" Curve sich schreiben lässt:

$$0 = u_\alpha^n \equiv [a_1^2\ u_3 - a_1\ a_2\ u_2 + a_2^2\ u_1]^n$$

und dass demnach für $v_i = (A\,M)_i$

$$v_\alpha\ u_\alpha^{n-1} = a_A\ a_M\ a_\lambda^{n-1}\ a_\mu^{n-1} = 0 \quad (12)$$

die erste Polare der Verbindungslinie von A und M in Bezug auf $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ vorstellt. Die Gleichung (12) ist aber nichts

anderes als die Gleichung der beigeordneten Curve von $a_\Lambda\, a_M\, a_\chi^{2n-2}$ und es folgt demnach der *Satz:*

2. Jeder binären Form 2nten Grades ist eine bestimmte Curve nter Klasse beigeordnet. Der gemischten Polaren 2er Punkte in Bezug auf die binäre Form ist in demselben Sinne eine Curve (n—1)ter Klasse beigeordnet. Diese Letztere ist die erste Polare der Verbindungslinie beider Punkte in Bezug auf die erstgenannte Curve.

Sind nunmehr $x_1\ x_2 \ldots x_{2n}$ irgend 2n Punkte von S und $(v_1\ v_2 \ldots v_n)$ n Geraden, die sämmtliche Punkte enthalten, so ergiebt sich in derselben Weise wie (12) die Gleichung:

$$a_{x_1}\, a_{x_2} \ldots a_{x_{2n}} = v_{1\alpha}\, v_{2\alpha} \ldots v_{n\alpha}$$

Verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, so gilt dasselbe für die linke, mithin folgt:

3. Irgend ein conjugirtes n-Seit der Curve $a_\lambda^n\, a_\mu^n = 0$ schneidet den Kegelschnitt in den Punkten einer zu a_χ^{2n} conjugirten Form.

Es seien ferner:

$$a_{1\chi} = 0 \quad a_{2\chi} = 0 \ldots . \ a_{2n,\chi} = 0$$

lineare Formen von der Beschaffenheit, dass $a_{1\chi}\, a_{2\chi} \ldots a_{2n,\chi}$ zu a_χ^{2n} conjugirt ist; dann gilt (cfr. Einleitung I) die Identität in x:

$$a_\chi^{2n} \equiv \rho_1\ a_{1\chi}^{2n} + \rho_2\ a_{2\chi}^{2n} + \ldots + \rho_{2n}\ a_{2n,\chi}^{2n}$$

also ist auch für jedes λ und μ:

$$a_\lambda^n\ a_\mu^n \equiv \rho_1\ a_{1\lambda}^n\ a_{1\mu}^n + \rho_2\ a_{2\lambda}^n\ a_{2\mu}^n + \ldots + \rho_{2n}\ a_{2n,\lambda}^n\ a_{2n,\mu}^n$$

Nun ist aber [für $u_i = (\lambda\,\mu)_i$] $a_{i\lambda}\ a_{i\mu} = 0$ offenbar nichts anderes als die Gleichung des Punktes $a_{ix} = 0$; wenn demnach die Coordinaten dieses Punktes $x_{i1}\ x_{i2}\ x_{i3}$ sind, so besteht die in $u_i = (\lambda\,\mu)_i$ identische Gleichung:

$$a_\lambda^n\ a_\mu^n \equiv \rho_1\ u_{x_1}^n + \rho_2\ u_{x_2}^n + \ldots + \rho_{2n}\ u_{x_{2n}}^n$$

Daraus folgt:

4. Haben wir 2n Punkte des Kegelschnitts, deren binäre Form zu a_χ^{2n} conjugirt ist, so ist jede durch diese Punkte gehende Curve nter Ordnung zu $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ conjugirt.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

5. Wenn durch 2n Punkte von S eine Curve $b_x^n = 0$ *gelegt werden kann, die zu* $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ *conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Curve n ter Ordnung dieselbe Eigenschaft und die binäre Form der 2n Punkte ist zu* a_x^{2n} *conjugirt.*

Denn ist $c_x^n = 0$ eine 2te Curve, welche durch jene 2n Punkte geht, so schneiden sich $b_x^n = 0$ und $c_x^n = 0$ ausser in diesen, noch in n(n—2) Punkten, durch welche bekanntlich eine Curve (n—2)ter Ordnung m_x^{n-2} hindurch gelegt werden kann, d. h. es ist:

$$c_x^n \equiv \rho\, b_x^n + \sigma\, s_x^2\ m_x^{n-2}$$

Da aber beide rechtsstehende Curven zu $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ conjugirt sind, die erste nach Voraussetzung, die zweite, weil $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ zu $s_x^2 = 0$ apolar ist, so ist auch $c_x^n = 0$ zu $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ conjugirt. Demnach stellt ein System von n Geraden, die sämmtliche 2n Punkte enthalten, ein conjugirtes n-Seit von $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ vor, und aus Satz *3* folgt also, dass die binäre Form der 2n Punkte zu a_x^{2n} conjugirt ist, womit der Satz *5* vollständig bewiesen ist.

Specielle Fälle der angeführten Sätze ergeben sich, wenn man die zu a_x^{2n} apolaren Formen betrachtet. Es gilt insbesondere der Satz:

6. Wenn 2p Punkte $(p < n)$ *eine apolare Form von* a_x^{2n} *bilden, so ist jede Curve p ter Ordnung, welche durch diese Punkte hindurchgeht, zu* $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ *apolar.*

Die Sätze *4* und *5* können noch in anderer Weise ausgesprochen werden. Zunächst bemerke man, dass die duale Betrachtung naturgemäss darauf führt, jeder Form a_x^{2n} auch die bestimmte Curve n ter Ordnung „beizuordnen", welche zu *S* als Klassencurve apolar ist und durch die 2n Punkte der Form hindurchgeht. Diese Curve ist auch nichts anderes als die reciprok-polare Figur der beigeordneten Klassencurve in Bezug auf den vorliegenden Kegelschnitt *S*. Es folgen jetzt unmittelbar die Sätze:

4a. Sind 2 binäre Formen geraden Grades conjugirt, so ist

die beigeordnete Ordnungscurve der einen zur beigeordneten Klassencurve der andern conjugirt.

5a. Haben wir 2 binäre Formen geraden Grades und ist die beigeordnete Ordnungscurve der einen zur beigeordneten Klassencurve der andern conjugirt, so sind die binären Formen zu einander conjugirt.

Weiterhin kann man von der Betrachtung der zu einer Form conjugirten Formen zur Betrachtung der Gruppen übergehen. Einer G_p^{2n} steht eine conjugirte G_{2n+1-p}^{2n} gegenüber und jeder Form der Letzteren ist eine Curve nter Klasse beigeordnet. Man erhält so eine $(2n+1-p)$-gliedrige Gruppe Γ, welche nur aus apolaren Curven besteht. Dieser steht wiederum eine

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (2n+1-p) = \frac{n(n-1)}{2} + p$$

gliedrige Gruppe G von Ordnungscurven gegenüber. Legt man nun durch die 2n Punkte einer zur G_p^{2n} gehörigen Form irgend eine Curve nter Ordnung, so ist dieselbe nach Satz *4* zu der ganzen Gruppe Γ conjugirt und gehört also der Gruppe G an; umgekehrt folgt aus *5*, dass sämmtliche zur Gruppe G gehörige Curven, welche S nicht in sich enthalten, auf S Formen der G_p^{2n} ausschneiden. Es folgt demnach:

*7. Haben wir auf S $(p+1)$ binäre Formen derselben G_p^{2n} und legen durch die 2n Punkte einer jeden eine beliebige Curve n ter Ordnung, so bilden diese $(p+1)$ Curven, zusammen mit der $\frac{(n-1)n}{2}$-gliedrigen Gruppe der S enthaltenden Curven nicht eine $\left[\frac{(n-1)n}{2}+p+1\right]$- sondern nur eine $\left[\frac{(n-1)n}{2}+p\right]$-*gliedrige Gruppe.

Dieser Satz gewährt einen deutlichen Einblick in den Zusammenhang, der zwischen einer Anzahl von binären Formen geraden Grades obwaltet, welche durch eine lineare Identität verbunden sind, und er lässt erkennen, worauf es bei der Lösung derjenigen Aufgaben ankommt, welche ich in der Einleitung unter (2) angeführt habe.

Ich will dies für den Fall erläutern, dass $p = 2n$ ist. Wenn eine G_{2n}^{2n} vorliegt, so steht ihr eine bestimmte Form 2 n ten

Grades $a_\varkappa^{2n}$ als conjugirt gegenüber und dieser wiederum ist eine Curve $n$ter Klasse K^n beigeordnet. Irgend n Gerade, welche alle 2n Punkte einer Form der G_{2n}^{2n} enthalten, bilden ein conjugirtes n-Seit der Curve K^n. Diese aber ist eindeutig bestimmt, sobald $\frac{n\,(n+3)}{2}$ conjugirte n-Seite derselben gegeben sind; mithin müssen sich auch alle conjugirten n-Seite von K^n (und damit alle Formen der Gruppe) construiren lassen, sobald irgend $\frac{n\,(n+3)}{2}$ solcher n-Seite bekannt sind. Diese können jedoch stets hergestellt werden, wenn 2n Formen der Gruppe gegeben sind, da hierzu nur nöthig wäre, dass durch 2n Punkte sich mehr von einander verschiedene n-Seite legen lassen (die alle 2n Punkte enthalten), als die Zahl $\frac{n+3}{4}$ angiebt. Aus alledem folgt, dass die Aufgabe: „alle Elemente einer G_{2n}^{2n} zu construiren, wenn 2n Formen derselben gegeben sind", sich zurückführen lässt auf die folgende: „Wenn $\frac{n\,(n+3)}{2}$ conjugirte n-Seite einer (nicht bekannten) Curve nter Klasse gegeben sind, so sollen alle conjugirten n-Seite derselben construirt werden".

Da eine Lösung dieser letztgenannten Aufgabe bisher nur für $n=2$ bekannt ist, so kann diese Betrachtung nur für die Construction der G_4^4 verwerthet werden, welche, wie schon erwähnt, Herr Serret angegeben hat. Wenn nämlich 4 Formen einer G_4^4 gegeben sind, welche resp. aus den Punkten:

$$a_i\ b_i\ c_i\ d_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bestehen, so bestimme man die 4 Geradenpaare

$$a_i\,b_i - c_i\,d_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und überdies das Geradenpaar $a_1\,d_1 - b_1\,c_1$. Diese 5 Paare als conjugirte Geradenpaare eines Kegelschnitts aufgefasst, bestimmen denselben eindeutig, und man kann, ohne den Kegelschnitt selbst herzustellen, alle weiteren conjugirten Geradenpaare desselben linear construiren. Jedes solche Geradenpaar schneidet auf dem Grundkegelschnitt S 4 Punkte aus, deren binäre Form der G_4^4 angehört.

§ 3.

Um die Betrachtungen der vorigen §§ für Formen ungeraden Grades zu verwerthen, muss man auf die ersten Polaren dieser Formen zurückgehen. Liegt nämlich die Form a_x^{2n+1} vor, so ist der Polaren jedes Punktes ρ (d. h. der binären Form $a_\rho\, a_x^{2n}$) die Curve

$$a_\rho\, a_\lambda^n\, a_\mu^n \equiv u_{a_\rho}^n = 0$$

beigeordnet. Wir können also sagen,

dass jeder Form (2n + 1)ten Grades eine Curvenschaar nter Klasse derart „beigeordnet" ist, dass jedem Punkte ρ von S eine bestimmte Curve derselben zugehört. Die Punkte des Kegelschnitts und die Curven der Schaar sind dadurch projectivisch zugeordnet.

Sind nun $x_1\ x_2 \ldots x_{2n}$ irgend 2n Punkte von S und $(v_1\ v_2 \ldots v_n)$ n Geraden, welche sämmtliche Punkte enthalten, so gilt nach Früherem die Gleichung:

$$a_\rho\, a_{x_1}\, a_{x_2} \ldots a_{x_{2n}} = v_{1a_\rho}\, v_{2a_\rho} \ldots v_{na_\rho}$$

mithin folgt:

8. Ein conjugirtes n-Seit der zu ρ gehörigen Curve der beigeordneten Schaar schneidet den Kegelschnitt in 2n Punkten, welche mit ρ zusammen eine binäre Form bilden, die zu a_x^{2n+1} conjugirt ist.

Sind ferner $a_{1x} = 0\ \ a_{2x} = 0 \ldots a_{2n,x} = 0$ Punkte (mit den Coordinaten $x_{i1}\ x_{i2}\ x_{i3}$) derart, dass $(\rho\ x)\ a_{1x}\ a_{2x} \ldots a_{2n,x}$ zu a_x^{2n+1} conjugirt ist, so gilt die Identität in $x_1\ x_2$:

$$a_x^{2n+1} \equiv \varepsilon\, (\rho\ x)^{2n+1} + \sum_{i=1}^{i=2n}{}' \tau_i\, a_{ix}^{2n+1}$$

Mithin ist:

$$a_\rho\, a_x^{2n} \equiv \sum_1^{2n}{}' \tau_i\, a_\rho\, a_{ix}^{2n}$$

und es gilt für $(\lambda\ \mu)_i = u_i$ die in u identische Gleichung:

$$a_\rho\, a_\lambda^n\, a_\mu^n = \sum_1^{2n}{}' \tau_i\, a_\rho\, a_{i\lambda}^n\, a_{i\mu}^n = \sum_1^{2n}{}' \omega_i\, u_{x_i}^n$$

Daraus folgt:

9. Ist die binäre Form von $(2n + 1)$ Punkten zu a_χ^{2n+1} conjugirt, so ist jede Curve $n$ter Ordnung, welche durch $2n$ dieser Punkte geht, zu der dem $(2n + 1)$ten Punkte zugehörigen Curve conjugirt,

und umgekehrt:

10. Wenn durch $2n$ Punkte von S eine Curve $n$ter Ordnung hindurch geht, die zu $a_\rho\, a_\lambda^n\, a_\mu^n = 0$ conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Curve dieselbe Eigenschaft und die $2n$ Punkte zusammen mit ρ bilden eine binäre Form, die zu a_χ^{2n+1} conjugirt ist.

Der letzte Satz folgt aus *9* mit Hülfe von *8* ebenso, wie *5* aus *4* mit Hülfe von Satz *3*.

Man könnte ohne Schwierigkeit Theoreme aufstellen, welche den Sätzen *4a* und *5a* entsprechen, doch würden diese nicht von der gleichen Einfachheit sein.

Ein den Satz *7* correspondirendes Theorem für Formen ungeraden Grades kann man erhalten, wenn man allen Formen einer G_p^{2n+1} einen beliebig fixirten Punkt hinzufügt und auf die so entstehende G_p^{2n+2} den Satz *7* anwendet:

11. Haben wir auf S $(p + 1)$ Formen einer G_p^{2n+1} und legen durch die $(2n + 1)$ Punkte einer jeden und einen beliebig fixirten Punkt von S je irgend eine Curve $(n + 1)$ter Ordnung, so bilden die so erhaltenen $(p + 1)$ Curven zusammen mit der $\frac{n(n+1)}{2}$ - gliedrigen Gruppe der S enthaltenden Curven $(n + 1)$ter Ordnung, nicht eine $\left[\frac{n(n+1)}{2} + p + 1\right]$- sondern nur eine $\left[\frac{n(n+1)}{2} + p\right]$ - gliedrige Gruppe.

§ 4.

Ich kehre nunmehr zu dem Satze 1 zurück, um eine weitere Anwendung desselben zu geben. Indem ich auf $\varphi = (x\lambda)^{n+1}\,(x\mu)^{n+1}$ die Operation: $\frac{1}{n+1}\left\{\rho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \rho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\}$ anwende, erlange ich:

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{1}{n+1}\left\{\rho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \rho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\} \\ &= (x\lambda)^n\,(x\mu)^n\,[(x\lambda)\,(\rho\mu) + (x\mu)\,(\rho\lambda)]\end{aligned} \qquad (13)$$

Ist nun a_y^{2n+1} eine beliebige binäre Form $(2n+1)$ten Grades und setzen wir in (13)

$$x_1 = a_2 \quad x_2 = -a_1$$

so ergiebt sich nach Satz *1* für $u_i = (\lambda\mu)_i$

$$0 = a_\lambda^n \, a_\mu^n \, [(\rho\lambda) \, a_\mu + (\rho\mu) \, a_\lambda] \tag{14}$$

als Gleichung einer zu S apolaren Curve, und zwar ist es die der Form $(\rho x) \, a_x^{2n+1}$ beigeordnete Curve $(n+1)$ter Klasse.

Die Gleichung (14) kann jedoch aus:

$$0 = a_\lambda^n \, a_\mu^n \, a_\sigma \tag{15a}$$

erhalten werden, indem man die Identität in x:

$$(x\sigma) = (\rho\lambda) \, (x\mu) + (\rho\mu) \, (x\lambda)$$

gelten lässt, d. h. wenn man annimmt, dass:

$$0 = (\rho\lambda) \, (\sigma\mu) + (\rho\mu) \, (\sigma\lambda). \tag{15b}$$

Die Gleichung (14) ist also das Eliminationsresultat von $\sigma_1 \sigma_2$ aus (15a) und (15b). Für $(\lambda u)_i = u_i$ ist (15a) die Gleichung der dem Punkte σ zugehörigen Curve K_σ derjenigen Curvenschaar, welche der Form a_x^{2n+1} beigeordnet ist (15b); dagegen ist die Gleichung des Punktes s, indem die Tangente in ρ von der Tangente in σ geschnitten wird. Dieser Punkt s und jene Curve sind einander eindeutig zugeordnet, und wenn man σ variirt, so beschreibt K_σ die beigeordnete Schaar und s eine dazu projectivische Punktreihe. Damnach stellt (14) das Erzeugniss dieser beiden projectivischen Reihen vor, und man hat den *Satz:*

12. Wenn eine binäre Form ungeraden Grades a_x^{2n+1} gegeben ist, so gehört zu jedem Punkte σ von S eine bestimmte Curve der beigeordneten Schaar. Fixirt man nun auf S einen Punkt ρ und schneidet die Tangente in ρ durch die Tangente jedes Punktes σ im Punkte s, so ist mittelbar jedem Punkte s eine Curve der Schaar zugeordnet. Das Erzeugniss der so erhaltenen projectivischen Punktreihe und Schaar ist diejenige Curve $(n+1)$ter Klasse, welche der binären Form $(\rho x) \, a_x^{2n+1}$ beigeordnet ist.

Wenn eine binäre Form geraden Grades a_x^{2n} vorliegt, so

können wir den Satz *12* für die Polare eines beliebigen Punktes ρ anwenden, welche vom $(2n-1)$ten Grade ist. Die zu dieser Form $(a_\rho\ a_x^{2n-1})$ gehörige Schaar wird durch:

$$a_\rho\ a_\sigma\ a_\lambda^{n-1}\ a_\mu^{n-1} = 0$$

bei variablem σ dargestellt; sie besteht daher [nach Gl (12), Seite *11*] aus denjenigen Curven $(n-1)$ter Klasse, welche erste Polaren der einzelnen Strahlen des Strahlbüschels um ρ in Bezug auf die Curve $a_\lambda^n\ a_\mu^n = 0$ sind. Wendet man nun den Satz *12* auf die binäre Form $a_\rho\ a_x^{2n-1}$ an, indem man gerade den Punkt ρ als festen Punkt wählt, so wird schliesslich diejenige Curve erzeugt, welche der Form $(\rho\ x)\ a_\rho\ a_x^{2n-1}$ beigeordnet ist. Diese Form aber können wir ansehen als die erste Polare von ρ in Bezug auf $(\rho\ x)\ a_x^{2n}$. Die erzeugte Curve gehört also dem Punkte ρ innerhalb derjenigen Schaar zu, welche der Form $(\rho\ x)\ a_x^{2n}$ beigeordnet ist. Es ergiebt sich mithin der *Satz:*

13. Liegt eine binäre Form geraden Grades a_x^{2n} vor, deren beigeordnete Curve K sei, und nimmt man auf S einen Punkt ρ beliebig an, construirt alsdann zu irgend einer durch ρ gehenden Geraden die erste Polare in Bezug auf K und schneidet die Tangente in ρ durch die Tangente des 2ten Schnittpunktes σ der Geraden in s, so sind jene erste Polare und dieser Punkt s eindeutig zugeordnet. Man erhält also, wenn man die Gerade durch ρ variirt, eine Curvenschaar $(n-1)$ter Klasse und eine zu ihr projectivische Punktreihe. Das Erzeugnis beider ist diejenige Curve nter Klasse, welche dem Punkte ρ in derjenigen Curvenschaar zugehört, die der Form $(\rho\ x)\ a_x^{2n}$ beigeordnet ist.

Man sieht sofort, worin der Nutzen der Sätze *12* und *13* besteht: Wenn man nämlich weiss, wie zu jeder Form 2nten Grades die beigeordnete Curve zu construiren ist, so ist man nach Satz *13* im Stande, die Curvenschaar, welche einer Form $(2n+1)$ten Grades beigeordnet ist, zu construiren und die projectivische Beziehung derselben zu den Punkten des Kegelschnittes festzulegen; denn man kann mit Hülfe dieses Satzes zu den $(2n+1)$ Punkten der Form die zugehörigen Curven der Schaar projectivisch erzeugen, und die projectivische Be-

ziehung ist dadurch mit bestimmt, weil $2n+1$ schon für $n = 1$ den Werth 3 hat.

Weil man nunmehr zu jeder Form $(2n + 1)$ten Grades die beigeordnete Schaar und ihre Zuordnung zu den Punkten von S bestimmen kann, so darf der Satz *12* angewandt werden und führt zur projectivischen Erzeugung der Curve, welche einer beliebigen Form $(2n + 2)$ten Grades beigeordnet ist. Indem man so fortfährt, abwechselnd die Sätze *13* und *12* anzuwenden, gelangt man dazu, die beigeordneten Curven jeder Form höheren Grades zu erzeugen unter der alleinigen Voraussetzung, dass man zu jeder Form $2n$ten Grades die beigeordnete Curve construiren kann. Da aber diese Voraussetzung für $n = 1$ erfüllt ist, so ist überhaupt die Construction dieser beigeordneten Curven und Curvenschaaren im Princip erledigt.

Es möge hier, obwohl ich weiterhin keinen Gebrauch davon mache, noch angedeutet werden, welche Resultate man erlangt, wenn man den Satz *1* für die mehrfach polarisirte Form $(x\lambda)^n (x\mu)^n$ anwendet. Indem man nämlich die Gleichung (13) der Operation $\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ unterwirft, ergiebt sich:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} \sigma_1 + \frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} \sigma_2 =$$

$$n (x\lambda)^{n-1} (x\mu)^{n-1} [(x\lambda) (\rho\mu) + (x\mu) (\rho\lambda)] [(x\lambda) (\sigma\mu) + (x\mu) (\sigma\lambda)]$$
$$+ (x\lambda)^n (x\mu)^n [(\sigma\lambda) (\rho\mu) + (\sigma\mu) (\rho\lambda)] \qquad (16)$$

Setzt man nunmehr $x_1 = a_2$ $x_2 = -a_1$, so erhält man nach Satz 1:

$$0 = n a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1} [(\rho\lambda) a_\mu + (\rho\mu) a_\lambda] [(\sigma\lambda) a_\mu + (\sigma\mu) a_\lambda]$$
$$+ a_\lambda^n a_\mu^n [(\sigma\lambda) (\rho\mu) + (\sigma\mu) (\rho\lambda)] \qquad (17)$$

als Gleichung einer zu S apolaren Curve, und zwar ist es die der binären Form $a_x^{2n} (\rho x) (\sigma x)$ beigeordnete Curve $(n+1)$ter Klasse.

Die Gleichung (17) entsteht aber aus:

$$0 = a_\lambda^{n-1} a_\mu^{n-1} a_\tau a_\omega \qquad (18)$$

indem man die folgende Identität in x gelten lässt;

$$(x\tau)\,(x\omega) = n\,[(\rho\lambda)\,(x\mu) + (\rho\mu)\,(x\lambda)]\,[(\sigma\lambda)\,(x\mu) + (\sigma\mu)\,(x\lambda)] + [(\sigma\lambda)\,(\rho\mu) + (\sigma\mu)\,(\rho\lambda)]\,(x\lambda)\,(x\mu)$$

d. h. wenn man annimmt, dass die rechts stehende quadratische Function von x, welche ich abkürzend mit $\psi\,(x\,x)$ bezeichnen will, für $x_i = \tau_i$ und $x_i = \omega_i$ verschwindet. Die Gleichung (17) ist demnach das Eliminationsresultat von $\tau\,\omega$ aus der Gleichung (18) und den 2 weiteren Gleichungen:

$$\begin{matrix}\psi\,(\tau\,\tau) = 0 \\ \psi\,(\omega\,\omega) = 0.\end{matrix} \qquad \left[19^{a}_{b}\right]$$

Jede der Gleichungen (19) ist für $u_i = (\lambda\,\mu)_i$ die Gleichung eines bestimmten Kegelschnitts, beide berühren die Tangenten in ρ und σ, der erste berührt überdies S im Punkte τ, der zweite ebenso in ω. Wir können jedoch die Kegelschnitte (19) noch näher charakterisiren: Setzt man nämlich in (16) $x_1 = \tau_1$ $x_2 = \tau_2$, so erhält man offenbar

$$(\tau\,\lambda)^{n-1}\,(\tau\,\mu)^{n-1}\,\psi\,(\tau\,\tau)$$

und dies ist nach Satz 1 die linke Seite einer zu S apolaren Curve. Wir sehen also,

dass der Kegelschnitt $\psi\,(\tau\,\tau) = 0$ mit dem $(n-1)$-fach gezählten Punkte τ zusammen eine zu S apolare Curve (n—1)ter Klasse bildet.

Man könnte also, indem man nur sehr spezielle Fälle der Sätze 13 und 12 in Anwendung brächte, projectivische Punktreihen angeben, welche $\psi\,(\tau\,\tau) = 0$ oder $\psi\,(\omega\,\omega) = 0$ erzeugen würden.

Die Curven (19a) und (19b) haben 4 gemeinschaftliche Tangenten, von denen 2, nämlich die Tangenten von S in ρ und σ fest, die beiden andern mit $\tau\omega$ variabel sind. Jedem Punktepaar τ ω entspricht also ein Geradenpaar und eine Curve (n—1)ter Klasse (18), welche dadurch einander eindeutig zugeordnet sind. Es wird einfach unendlich viele Male vorkommen, dass eine Gerade des Geradenpaars die zugehörige Curve tangirt. Die Geraden dieser Eigenschaft umhüllen die Curve (17), d. h. die beigeordnete Curve von $a_x^{2n}\,(\rho\,x)\,(\sigma\,x)$.

Man sieht, wie diese Betrachtung unter fortwährender Anwendung des Satzes 1 fortgesetzt werden kann und zu Er-

zeugungsarten derjenigen Curven führt, welche den Formen a_x^{2n} (ρx) (σx) (τx), a_y^{2n} (ρx) (σx) (τx) (ωx) etc. beigeordnet sind, sobald die beigeordnete Curve von a_x^{2n} bekannt ist.

§ 5.

Die Sätze *12* und *13* gestatten ganz allgemein die Construction der zu einer binären Form conjugirten Formen, sobald die Lösung der folgenden Hülfsaufgabe bekannt ist:

14. Eine Schaar von Curven n ter Klasse (für $n > 1$):

$$u_\alpha^n + \rho\, u_\beta^n = 0 \tag{20a}$$

sei nicht selbst gegeben, aber es sei möglich, zu jeder einzelnen Curve derselben sämmtliche conjugirte n - Seite linear zu construiren[12]*). Es sei ferner eine zu dieser Schaar projectivische Punktreihe II:*

$$u_A + \rho\, u_B = 0 \tag{20b}$$

gegeben (wobei die Elemente desselben Parameters sich entsprechen). Es sollen alle conjugirten $(n + 1)$ - Seite der von den beiden projectivischen Reihen erzeugten Curve:

$$u_\gamma^{n+1} = \begin{vmatrix} u_\alpha^n & u_\beta^n \\ u_A & u_B \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

construirt werden.

Ich nehme an, dass die entsprechende Aufgabe für eine Curvenschaar $(n-1)$ter Klasse bereits gelöst sei, und werde zeigen, dass und wie sie alsdann für die (vorliegende) Curvenschaar nter Klasse zu lösen ist.

Zu diesem Zweck will ich die Punkte der Punktreihe (20b) mit $\pi_1\ \pi_2 \ldots \pi_i \ldots$, die entsprechenden Curven der Schaar (20a) mit $K_1\ K_2 \ldots K_i \ldots$ und das Erzeugniss beider Reihen mit $(\pi—K)$ bezeichnen. Ausserdem soll allgemein K_v die Polare der Geraden v in Bezug auf eine Klassencurve K bedeuten. Danach wird $(\pi—K)_v$ die Polare von v in Bezug auf $(\pi—K)$,

[12]) Darunter soll stets verstanden werden, dass man im Stande sei, die gemischte Polare von irgend $(n—1)$ Geraden in Bezug auf die betreffende Curve linear herzustellen.

dagegen $(\pi - K_v)$ das Erzeugniss der projectivischen Reihen $(\pi_1\ \pi_2\ \ldots\ \pi_i\ \ldots)$ $(K_{1v}\ K_{2v}\ \ldots\ K_{iv}\ \ldots)$[13]) vorstellen. Ich behaupte nun, dass die Curve $(\pi - K)_v$ derjenigen Schaar angehört, welche gebildet wird:

1) von der Curve $(\pi - K_v)$

2) von derjenigen Curve, welche innerhalb der Schaar der Curven K dem Schnittpunkt von π mit v entspricht.

In der That folgt aus (21) durch Polarenbildung die in u identische Gleichung:

$$(n+1)\, v_\gamma\, u_\gamma^n = n \begin{vmatrix} v_\alpha & u_\alpha^{n-1} & v_\beta & u_\beta^{n-1} \\ & u_A & & u_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_\alpha^n & u_\beta^n \\ v_A & v_B \end{vmatrix}. \quad (22)$$

welche das Gesagte bestätigt.

Schreibt man nunmehr v_1 an Stelle von v und bestimmt in Bezug auf die 3 genannten Curven, welche derselben Schaar angehören, die gemischten Polaren von (n—1) weiteren Geraden $v_2 \ldots v_n$, so erhält man 3 Punkte, welche auf derselben Geraden liegen. Der Punkt $(\pi - K)_{v_1 v_2 \ldots v_n}$ liegt demnach auf der Verbindungslinie der folgenden 2 Punkte:

1) des Punktes $(\pi - K_{v_1})_{v_2 v_3 \ldots v_n}$. Dieser Punkt ist linear construirbar, weil wir angenommen haben, dass die Aufgabe *14* gelöst sei, sobald an Stelle der Curvenschaar nter Klasse eine Schaar von Curven (n—1)ter Klasse gesetzt wird, wie hier der Fall ist. Um aber darzuthun, dass die Voraussetzungen der (für $(n-1)$ an Stelle von n ausgesprochenen) Aufgabe *14* erfüllt sind, hat man nur zu zeigen, dass man zu jeder einzelnen der Curven $K_{1v_1}\ K_{2v_1}$ ... sämmtliche conjugirte (n—1)-Seite construiren kann. Dies ist in der That möglich, weil jedes solche (n—1)-Seit für K_{iv_1} mit v_1 vereinigt, ein conjugirtes n-Seit für K_i bildet und wir nach der Voraussetzung der ursprünglichen Aufgabe in der Lage sind, für jede der Curven K sämmtliche conjugirte n-Seite herzustellen;

2) des Polarpunktes von $v_2 \ldots v_n$ in Bezug auf diejenige Curve der gegebenen Schaar, welche dem Schnittpunkt von v_1

[13]) Damit diese Curven angebbar seien, musste $n \geq 1$ angenommen werden.

und π entspricht. Dieser Punkt ist nach der Voraussetzung der Aufgabe ohne Weiteres construirbar.

Wird die Verbindungslinie von (1) und (2) mit V_1 bezeichnet, so liegt der Polarpuukt der Geraden $v_1\ v_2\ \ldots\ v_n$ in Bezug auf die Curve $(\pi - K)$, auf dessen Aufsuchung wir hinzielen, jedenfalls auf der Geraden V_1. Auf diese war man jedoch gelangt, indem man v_1 aus der Reihe der Geraden $v_1\ v_2\ \ldots\ v_n$ hervorhob; verfährt man also in derselben Weise mit v_2, so erlangt man eine 2te Gerade V_2, welche ebenfalls den gesuchten Polarpunkt enthält. Dieser ist demnach identisch mit dem Schnittpunkt von V_1 und V_2 und die Aufgabe 14 ist demnach gelöst, einstweilen noch unter der Voraussetzung, dass die analoge Aufgabe des (n—1)ten Grades gelöst ist; d. h. die Aufgabe des nten Grades ist auf die entsprechende des $(n-1)$ten Grades reducirt.

Danach ist insbesondere die Lösung von 14 für $n = 2$ auf die folgende Aufgabe zurückgeführt: „Wenn 2 projectivische Punktreihen gegeben sind, welche einen Kegelschnitt erzeugen, so sollen sämmtliche conjugirte Geradenpaare derselben construirt werden. Da aber diese Aufgabe in der That sehr leicht lösbar ist, so ist die in 14 geforderte Construction für $n = 2$, also überhaupt allgemein vermöge der oben gegebenen Methode ausführbar.

§ 6.

Constructionen auf einem Kegelschnitt.

A. Formen dritten Grades.

I. Es sei eine binäre Form a_x^3 gegeben, welche aus den Punkten 1, 2, 3 (des Grundkegelschnitts S) bestehen möge. Derselben ist als Form $(2n+1)$ten Grades (für $n = 1$) eine Punktreihe P beigeordnet, derart, dass zu jedem Punkte σ des Kegelschnitts ein Punkt p_σ der Punktreihe gehört, und aus Satz *9* folgt, dass wenn die Punkte $\sigma\,\tau\,\omega$ eine zu a_x^3 conjugirte Form bilden, die Gerade $\tau\,\omega$ durch p_σ hindurchgeht. Die Strahlen durch p_σ schneiden also auf S diejenige Involution aus, welche innerhalb der zu a_x^3 conjugirten G_3^3 dem Punkte σ

zugehört (cfr. Einl. VII.). Nun kann man sehr leicht $p_1 p_2 p_3$ construiren, denn es bildet, wie aus den beiden Sätzen II. der Einleitung hervorgeht, sowohl der dreifach gezählte Punkt 1, als auch (1 2 3) selbst je eine Form der conjugirten G_3^3. Die Tangenten in 1 und die Gerade $\overline{23}$ schneiden sich demnach im Punkte p_1; ebenso ist

$$p_2 = t_2 \quad \overline{31} \quad p_3 = t_3 - \overline{12}$$

wenn t_σ allgemein die Tangente des Punktes σ bezeichnet. Dass die 3 Punkte p_1 p_2 p_3 in der That auf derselben Geraden liegen, ist die Folge eines bekannten Satzes.

Durch Construction der Punkte p_1 p_2 p_3 ist nun die Punktreihe P und ihre Zuordnung zu den Pnnkten des Kegelschnitts vollständig bestimmt; man könnte nach den gewöhnlichen Regeln der Construction projectivischer Gebilde zu jedem Punkte σ den zugehörigen p_σ construiren. In unserem Falle jedoch vereinfacht sich diese Construction bedeutend und kann kurz so angegeben werden: Man bestimme den 2ten Schnittpunkt σ^1 von $\overline{p_1\sigma}$ mit P und den Schnittpunkt von $\sigma^1 1$ mit P; der Letztere ist p_σ; denn da nach Construktion $1\sigma\sigma^1$ ein Element der G_3^3 ist, so ist $1\sigma^1$ ein Element der zu σ innerhalb der G_3^3 gehörigen G_2^2, p_σ muss also auf der Geraden $1\sigma^1$ und zugleich auf P liegen, wie behauptet wurde.

Um also zu einem Puuktepaar $\tau\,\omega$ den Punkt σ zu finden, welcher es zu einem Element der conjugirten G_3^3 ergänzt, bestimmt man $(\tau\,\omega - P) = p_\sigma$, fixirt den 2ten Schnittpunkt σ^1 von $\overline{1p_\sigma}$ mit S und erhält alsdann σ als 2ten Schnittpunkt von S mit $p_1\sigma^1$.

Es möge hervorgehoben werden, dass die angegebenen Constructionen richtig bleiben, wenn man an Stelle von 1 und p_1 überall die Punkte ρ und p_ρ setzt, wo ρ einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts bedeutet. Ist nämlich die Gerade P und sind überdies die zugehörigen Punkte ρ und p_ρ gegeben, so wird zu irgend einem Punkte σ des Kegelschnitts der zugehörige Punkt p_σ gefunden, indem man: $(\sigma\, p_\rho - S) = \sigma^1$ $(\sigma^1\,\rho - P) = p_\sigma$ bestimmt.

Das Punktepaar, welches die Gerade P auf dem Kegelschnitt S ausschneidet, ist die einzige apolare Form von a_x^3 und stellt mithin die Hesse'sche Covariante dieser Form vor, denn eine Form iten Grades, die zu einer Form nten Grades apolar ist, ist (nach V. der Einl.) zu allen (n—i)ten Polaren der Form conjugirt. In unserem Falle ist demnach das Punktepaar harmonisch zu allen ersten Polaren von a_x^3 und ist also in der That mit der Hesse'schen Covariante dieser Form identisch.

II. Zwei Formen dritten Grades $a_x^3\ b_x^3$, welche resp. aus den Punkten (1 2 3) ($1^1\ 2^1\ 3^1$) bestehen, haben eine G_2^3 von conjugirten Formen. Die beigeordnete Punktreihe von a_x^3 sei P ($p_\sigma \ldots$), die von b_x^3 sei Q ($q_\sigma \ldots$). Die Gerade $p_\sigma\ q_\sigma$ schneidet auf S das zu σ innerhalb der conjugirten G_2^3 gehörige Punktepaar aus. Die projectivisch auf einander bezogenen Punktreihen ($p_\sigma\ p_\tau \ldots$) ($q_\sigma\ q_\tau \ldots$) erzeugen demnach die Involutionscurve[14]) der erwähnten G_2^3; d. h. die Curve 2ter Klasse, welche den von den Tripeln derselben gebildeten Dreiecken eingeschrieben ist. Die Gleichung dieser Curve entsteht für $u_i = (\lambda\,\mu)_i$ durch Elimination von σ aus: $a_\sigma\ a_\lambda\ a_\mu = 0$ und $b_\sigma\ b_\lambda\ b_\mu = 0$ und ist daher:

$$f \equiv (a\,b)\ a_\lambda\ a_\mu\ b_\lambda\ b_\mu = 0. \qquad (23)$$

Wenn a_x^3 und b_x^3 zu einander conjugirt sind, so steht die Involution $a_x^3 + \rho\ b_x^3$ sich selbst als conjugirte gegenüber und die Curve (23), die wir in diesem Falle J nennen wollen, ist auch Involutionscurve von $a_x^3 + \rho\, b_x^3$. Als solche hat sie die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{(\lambda\,\mu)} \begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 \\ a_\mu^3 & b_\mu^3 \end{vmatrix} = (a\,b)\ [a_\lambda^2\ b_\mu^2 + a_\lambda\ b_\mu\ a_\mu\ b_\lambda + a_\mu^2\ b_\lambda^2] \qquad (23a)$$

weil sie von denjenigen Geraden berührt wird, deren Schnittpunkte $\lambda\,\mu$ mit S demselben Element der Involution angehören, ihre Gleichung demnach durch Elimination von ρ aus:

---

[14]) Weyr. Crelles Journal. Bd. 72.

$$a_\lambda^3 + \rho\, b_\lambda^3 = 0$$
$$a_\mu^3 + \rho\, b_\mu^3 = 0$$

erhalten wird, wobei die Lösung $\lambda = \mu$ auszuschliessen ist.

Dass für $(ab)^3 = 0$ die Curven (23) und (23a) in der That dentisch sind, bestätigt man sofort, indem man die identische Gleichung:

$$(ab)^3\ (\lambda\mu)^2 = (ab)\ [a_\lambda^2\, b_\mu^2 - 2a_\lambda\, a_\mu\, b_\lambda\, b_\mu + a_\mu^2\, b_\lambda^2] = 0$$

mit (23) verbindet. Ebenso erhält man aber auch:

$$4f = (ab)\ (a_\lambda\, b_\mu + a_\mu\, b_\lambda)^2 = 0$$

als eine neue Gleichungsform derselben Curve. Bildet man für diese (nach Seite 10) Df und ΔDf, so ersieht man aus den Gleichungen:

$$2.\ 4\ Df = 4\ (ab)\ (a_\lambda b_\mu + a_\mu b_\lambda)\ a_\mu b_\mu$$
$$6.\ 4\ \Delta Df = 4\ (ab)\ (a_\lambda b_\mu + a_\mu b_\lambda)^2 + 8\ (ab)\ a_\lambda b_\mu\, a_\mu b_\lambda$$

unter Benutzung von (23) und (23b), dass

$$\Delta Df = f$$

ist, und dass also J als Curve 2ter Klasse zu S als Curve 2ter Ordnung conjugirt ist. Nun ist aber die Bedingung dafür, dass einem Kegelschnitt $0 = a_x^2 \equiv a_x'^2 \equiv a_x''^2 \equiv a_x'''^2$ unendlich viele einem andern $s_x^2 \equiv s_x'^2 = 0$ eingeschriebene Dreiecke umschrieben werden können, dargestellt durch:[15])

$$3\ [(aa'\ s)^2]^2 = 4\ (aa'\ a'')^2\ (a''\ ss')^2.$$

Mithin hat die Curve J, wenn sie nicht zerfällt, die Eigenschaft, dass sie auch als Ordnungscurve zu S conjugirt ist, und dass ihr unendlich viele Dreiecke eingeschrieben werden können, die S umschrieben sind; aus Alledem folgt:

15. Wenn 2 Punktetripel auf einem Kegelschnitt S 2 zu einander conjugirte Formen dritten Grades vorstellen, so ist der den Dreiecken der beiden Trtpel eingeschriebene Kegelschnitt J sowohl als Ordnungs- als auch als Klassencurve zu S conjugirt

[15]) Salmon-Fiedler, Theorie d. Kegelschnitte. 2te Aufl. p. 448.

und man kann J unendlich viele Dreiecke einschreiben, die S umschrieben sind.

Da aber J als Klassencurve zu S conjugirt ist, so folgt auch, dass, wenn die Gerade $\lambda\mu$ Tangente von J ist, $t_\lambda\, t_\mu$ conjugirte Geraden in Bezug auf J vorstellen, d. h.:

16. Wenn $a_\varkappa^3 b_\varkappa^3$ conjugirt sind, so schneidet jede Tangente des Involutionskegelschnitts (J) der von den beiden Formen gebildeten Involution die Curve S in 2 Punkten, deren Tangentenpaar zu J conjugirt ist.

Ist also $\sigma\tau\omega$ irgend ein Tripel der erwähnten Involution, so ist $t_\sigma\, t_\tau\, t_\omega$ ein Polardreiseit der Involutionscurve.

III. In der Einleitung habe ich erwähnt, dass sich an den Begriff der conjugirten Formen 2 Reihen von Aufgaben naturgemäss anknüpfen. Für Formen des dritten Grades ist die erste Reihe der Constructionen, soweit sie linear ausführbar sind, durch das Vorhergehende erschöpft; von den andern Aufgaben: der Construction einer cubischen Involution aus 2 ihrer Elemente und der Construction einer G_3^3 aus 3 ihrer Formen, ist die Letztere bisher nicht behandelt worden. Ich will daher zeigen, dass sie mit Hülfe der bekannten Construction der G_2^3 (aus 2 ihrer Elemente) ausführbar ist, welche folgendermassen ausgesprochen werden kann:

„Um innerhalb der von $b_\varkappa^3$ $(1'2'3')$ und $c_\varkappa^3$ $(1''2''3'')$ gebildeten Involution zu einem Punkte ρ das zugehörige Punktepaar $\sigma\tau$ zu construiren, bestimme man zunächst den Punkt $O = 2'3'—2''3''$, alsdann den 2ten Schnittpunkt ρ' von O mit S und fixire die Punkte:

$$\rho' 1' — 2''3'' \quad \rho' 1'' — 2'3'.$$

Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte schneidet S in den gesuchten Punkten $\sigma\tau$."

Die Richtigkeit dieser Construction kann man mit Hülfe des Satzes 11. leicht bestätigen.

IV. Es seien nunmehr 3 Formen dritten Grades $a_\varkappa^3 b_\varkappa^3 c_\varkappa^3$ gegeben, welche resp. aus den Punkten 123, $1'2'3'$, $1''2''3''$ bestehen. Ich stelle mir die Aufgabe, innerhalb der von ihnen gebildeten G_3^3 zu irgend 2 Punkten den zugehörigen dritten zu

construiren. Es sei $a_\varkappa^3$ die Form, welche zu der G_3^3 conjugirt ist; denn ist die Aufgabe gelöst, wenn es gelingt, für diese Form die beigeordnete Punktreihe Π (π_σ) zu bestimmen. Das kann folgendermassen geschehen: Man construire das zu 1 innerhalb der Involution $(b_\varkappa^3 c_\varkappa^3)$ gehörige Punktepaar $\sigma_1\tau_1$ und ebenso die zu 2 und 3 gehörigen $\sigma_2\tau_2$ und $\sigma_3\tau_3$. Da alsdann sowohl 123, als auch $1\sigma_1\tau_1$ der G_3^3 angehören, so ist:

$$\pi_1 = \overline{23} - \overline{\sigma_1\tau_1} \quad \pi_2 = \overline{31} - \overline{\sigma_2\tau_2} \quad \pi_3 = \overline{21} - \overline{\sigma_3\tau_3}.$$

Dadurch ist die Punktreihe Π und ihre Zuordnung zu den Punkten des Kegelschnitts festgelegt, und um nunmehr zu irgend 2 Punkten $\sigma\tau$ den zugehörigen Punkt ρ zu bestimmen, haben wir nur nach der Methode von I zu verfahren, nämlich den Schnittpunkt $\sigma\tau - \pi = \pi_\rho$ zu fixiren, $\pi_\rho 1 - S = \rho^1$ und $\rho^1\pi_1 - S = \rho$ aufzusuchen.

Ich füge noch die folgende Bemerkung hinzu:

17. Wenn die Punkte (σ) eines Kegelschnitts S projectivisch sind zu einer Punktreihe P (p_σ) derart, dass für 3 Punkte (123) p_1 auf $\overline{23}$, p_2 auf $\overline{31}$ und p_3 auf $\overline{12}$ liegt, so erhält man allgemein p_σ aus σ, indem man $\sigma p_1 - S = \sigma^1$, $\sigma' 1 - P = p_\sigma$ bestimmt, d. h. P ist die beigeordnete Punktreihe einer Form, die zu der binären Form der Punkte 123 conjugirt ist.

Beweis: Die erwähnte Construction, nach welcher man $\sigma p_1 - S = \sigma'$, $\sigma' 1 - P = q_\sigma$ zu construiren hat, ordnet jedem Punkte σ eindeutig einen Punkt q_σ zu und umgekehrt; vermöge derselben erhält man also jedenfalls eine zu den Punkten σ von S projectivische Reihe auf dem Träger der Punktreihe P. Nun ordnet sie aber, wie man leicht bestätigt, den drei Punkten 1 2 3 resp. die Punkte p_1 p_2 p_3 zu, d. h. es ist $p_1 = q_1$ $p_2 = q_2$ $p_3 = q_3$, folglich allgemein $q_\sigma = p_\sigma$, wie behauptet wurde

Man kann nunmehr bemerken, dass die Aufgabe, die durch 3 Tripel gegebene G_3^3 zu construiren, zusammenfällt mit der folgenden Aufgabe, welche dadurch mit gelöst ist:

18. Es sind 3 einem Kegelschnitt S eingeschriebene Dreiecke gegeben. Es soll eine Gerade Π so bestimmt werden, dass die 3×3 Ecken der Dreiecke $(123, 1'2'3', 1''2''3'')$ projectivisch

sind resp. zu den Schnittpunkten von π mit den Gegenseiten $(\pi_1\,\pi_2\,\pi_3\;\;\pi_{1'}\,\pi_{2'}\,\ldots.)$.

Dass diese Aufgabe stets eine Lösung zulässt, ist aus der angegebenen Construction der Geraden *II* zu ersehen; dass sie nicht mehr als eine Lösung besitzt, erkennt man mit Hülfe des Satzes *17*. Denn nach diesem Satz ist jede Punktreihe *II*, welche der Aufgabe genügt, beigeordnete Punktreihe einer Form, die sowohl zu 123, als zu 1′2′3′ und 1″2″3″ conjugirt ist; da es aber nur eine solche Form giebt, so giebt es auch nur eine Gerade *II*.

B. Formen vierten Grades.

I. Es sei eine binäre Form a_γ^4 gegeben, welche aus den Punkten 1,2,3,4 bestehe. Zn der von 1,2,3 gebildeten binären Form 3ten Grades sei nach AI. die beigeordnete Punktreihe P mit den Punkten $p_1\;p_2\;p_3$ construirt. Ich ziehe nunmehr im Punkte 4 die Tangente t_4 und bezeichne die Schnittpunkte derselben mit $t_1\;t_2\;t_3$ resp. mit $s_1\;s_2\;s_3$. Die durch $p_1\;p_2\;p_3$ — $s_1\;s_2\;s_3$ definirten projectivischen Punktreihen erzeugen nach Satz *12* die beigeordnete Curve K_2 von a_χ^4. Nunmehr kann man vermöge einer einfachen linearen Construction (ohne die Curve K_2 wirklich herzustellen) zu irgend einer Geraden u den Polarpunkt in Bezug auf K_2 construiren: Wenn nämlich u die Punktreihen in p_τ und s_ω trifft, so hat man s_τ und p_ω herzustellen. Ist o alsdann der Schnittpunkt der Geraden $p_\tau s_\omega - s_\tau p_\omega$, so ist der vierte harmonische Punkt von o in Bezug auf s_τ und p_ω der gesuchte Punkt O. Man erhält ihn also auch, indem man $s_\tau p_\tau - s_\omega p_\omega = o'$ bestimmt, diesen mit dem Schnittpunkt der Geraden P und t_4 verbindet und O als Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit $s_\tau p_\omega$ aufsucht.

Wenn nunmehr u mit S die Punkte $\rho\sigma$ gemein hat, so schneiden die Geraden durch o auf S diejenige G_2^2 aus, welche innerhalb der zu a_χ^4 conjugirten G_4^4 den Punkten $\rho\,\sigma$ zugehört. Man kann danach alle Elemente dieser G_4^4 construiren.

Nach Satz VI. der Einleitung besitzt a_χ^4 eine G_2^3 von apolaren Formen. Das innerhalb derselben zu irgend einem Punkte σ gehörige Punktepaar wird von der Polaren von σ in

Bezug auf K_2 ausgeschnitten und ist also nicht minder leicht zu erhalten.

II. Wenn 2 Formen $a_x^4 b_x^4$ vorliegen, so kann man in derselben Weise Punktreihen herstellen, welche die beiden beigeordneten Curven $a_\lambda^2 a_\mu^2 = 0$ $b_\lambda^2 b_\mu^2 = 0$ erzeugen. Alsdann ist die Construction der zu beiden Formen conjugirten G_3^4 ohne Schwierigkeit; denn um $\rho\sigma$ zu einem Element der G_3^4 zu ergänzen, hat man nur die Polarpunkte der Geraden $\sigma\rho$ in Bezug auf $a_\lambda^2 a_\mu^2 = 0$ und $b_\lambda^2 b_\mu^2 = 0$ nach Massgabe von I. zu construiren, die Verbindungslinie beider herzustellen und die Schnittpunkte derselben mit S zu bestimmen.

Die Construction der zu 3 und 4 biquadr. Formen, conjugirten Formen, kann offenbar nicht mehr linear ausgeführt werden.

C. Formen fünften Grades.

Die Form a_x^5 bestehe aus den Punkten 1, 2, 3, 4, 5. Ich denke die beiden Punktreihen construirt, welche die beigeordnete Curve K der biquadratischen Form (1, 2, 3, 4) erzeugen. Alsdann kann ich zu jeder durch 5 gehenden Geraden 5σ den Pol p_5 in Bezug auf K nach B. I. construiren, oder was dasselbe ist, den Punkt, dessen Büschel die zu 5σ in Bezug auf (1, 2, 3, 4) gehörige Involution auf S ausschneidet.

Diese Punkte p_5 bilden eine Punktreihe, welche zu derjenigen projectivisch ist, die man erhält, wenn man die Tangente in 5 durch t_5 schneidet und den Punkt σ auf S variirt; das Erzeugniss beider Reihen ist aber nach Satz *13* die zu 5 innerhalb der beigeordneten Schaar von (1, 2, 3, 4, 5) gehörige Curve. Man kann jetzt innerhalb der zu a_x^5 conjugirten G_5^5 alle Elemente construiren, welche den Punkt 5 selbst enthalten. Hierbei war aber der Punkt 5 bevorzugt worden, und indem man analog mit 4 verfährt, ist man im Stande, alle diejenigen Elemente der G_5^5 herzustellen, welche 4 enthalten. Um nun die zu 3 beliebigen Punkten I, II, III innerhalb der G_5^5 gehörige G_2^2 zu construiren, suche man den Punkt:

α, welcher I. II. III. 5
und β, welcher I. II. III. 4

zu je einem Element der Gruppe ergänzt. Der Schnittpunkt der Geraden $5\alpha - 4\beta$ ist alsdann der Punkt, dessen Strahlbüschel die gesuchte G_2^2 auf S ausschneidet.

Die zu a_x^5 apolaren Formen 4ten Grades bilden nach Satz VI. der Einl. eine G_3^4. Um 2 Punkte $\rho\sigma$ zu einem Element derselben zu ergänzen, hat man nur die beiden G_2^2 zu construiren, welche resp. $\rho\sigma 5$ und $\rho\sigma 4$ zugehören; das gemeinsame Element $\tau\omega$ derselben bildet mit $\rho\sigma$ zusammen ein Element der erwähnten G_3^4.

Ueberdies giebt es eine Form 3ten Grades, welche zu a_x^5 apolar ist. Das Dreiseit ihrer 3 Punkte ist das gemeinsame Polardreiseit aller Curven der beigeordneten Schaar.

Wie nach Massgabe des Vorhergehenden die Construction der zu 2 Formen 5ten Grades conjugirten Formen zu geschehen hat, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

D. Construction der conjugirten Formen

einer Form 2nten Grades a_x^{2n} $(n > 2)$

unter der Voraussetzung:

dass die Aufgabe gelöst sei, die conjugirte G_{2n-1}^{2n-1} einer beliebigen Form $(2n-1)$ten Grades zu construiren.

Die Form a_x^{2n} bestehe aus den Punkten $a_1\ a_2 \ldots a_{2n}$. Ich will die binäre Form der Punkte $a_1\ a_2 \ldots a_{2n-1}$ mit b_x^{2n-1} bezeichnen. Die Letztere besitzt eine beigeordnete Schaar von Curven $(n-1)$ter Klasse, welche den Punkten von S in der Art zugeordnet ist, dass dem Punkte σ die Curve K_σ der Schaar entspricht. Da ich alle conjugirten Formen von b_x^{2n-1} construiren kann, so bin ich in der Lage, zu jeder einzelnen Curve K_σ sämmtliche conjugirte $(n-1)$=Seite anzugeben. Ich ziehe nunmehr die Tangente t_{2n} im Punkte a_{2n} und bestimme den Schnittpunkt s derselben mit der Tangente in σ. Der Punkt s und die Curve K_σ sind alsdann einander eindeutig zugeordnet, und indem ich σ variire, erhalte ich 2 projectivische Reihen, deren Erzeugniss nach Satz 12 die Curve $a_\lambda^n a_\mu^n = 0$ ist. Um nunmehr alle n-Seite der letztgenannten Curve, d. h. alle zu a_x^{2n} conjugirten Formen zu construiren, hat man nur

auf die (für $\overline{n-1}$ an Stelle von n ausgesprochene) Aufgabe *14* zurückzugehn, deren 2 Voraussetzungen hier erfüllt sind (die eine nach der eben angestellten Betrachtung, die andere weil oben $n > 2$ angenommen wurde), und deren Lösung bereits bekannt ist.

E. Construction der zu einer Form (2n+1)ten Grades a_x^{2n+1} conjugirten Formen (n > 2).

Indem ich die unter *D* gemachte Voraussetzung festhalte, bin ich vermöge des Obigen in der Lage, zu jeder Form 2ntен Grades sämmtliche conjugirte Formen zu construiren.

Nun bestehe die vorgelegte Form a_x^{2n+1} aus den Punkten $a_1\ a_2 \ldots . a_{2n+1}$. Ich bezeichne die binäre Form der Punkte $a_1\ a_2 \ldots a_{2n}$ mit b_x^{2n}, die derselben beigeordnete Curve ist alsdann $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$. Da ich alle conjugirten Formen von b_x^{2n} construiren kann, so bin ich im Stande, sämmtliche conjugirte n-Seite von $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$ anzugeben, oder mit anderen Worten: Wenn v eine Gerade und *II* die erste Polare derselben in Bezug auf $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$ ist, so kann ich alle conjugirten (n—1)-Seite dieser Curve *II* linear construiren.

Ich verbinde nunmehr den Punkt a_{2n+1} mit allen Punkten σ von *S*, denke die erste Polare K_σ der Geraden σa_{2n+1} in Bezug auf $b_\lambda^n b_\mu^n = 0$ hergestellt und bestimme den Schnittpunkt s von t_σ mit der Tangente in a_{2n+1} . s und K_σ sind alsdann eindeutig zugeordnet, und indem man σ variirt, erhält man 2 projectivische Reihen, deren Erzeugniss eine Curve K ist. Da ich, wie schon bemerkt, zu jeder Curve K_σ sämmtliche conjugirte (n—1)-Seite herstellen kann, so sind die Voraussetzungen der (für $\overline{n-1}$ an Stelle von n auszusprechenden) Aufgabe *14*, erfüllt und ich kann demnach sämmtliche conjugirte n-Seite von K construiren. K ist aber nach Satz *13* diejenige Curve, welche innerhalb der beigeordneten Schaar von a_x^{2n+1} dem Punkte a_{2n+1} zugehört. Ich kann also sämmtliche Elemente derjenigen G_{2n}^{2n} construiren, welche innerhalb der zu a_x^{2n+1} conjugirten G_{2n+1}^{2n+1} dem Punkte a_{2n+1} zugehört, d. h. ich kann alle diejenigen zu a_x^{2n+1} conjugirten Formen linear herstellen, welche den Punkt a_{2n+1} enthalten.

Auf demselben Wege aber ist es mir möglich, alle diejenigen conjugirten Formen zu construiren, welche den Punkt a_{2n} enthalten.

Um nunmehr die zu (2n—1) beliebigen Punkte $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{2n-1}$ innerhalb der conjugirten G_{2n+1}^{2n+1} gehörige G_2^2 herzustellen, verfahre ich folgendermassen: Ich bestimme, was nach dem Vorhergehenden sofort ausführbar ist:

den Punkt ρ_{2n}, welcher $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{2n-1}\, a_{2n}$

und den Punkt ρ_{2n+1}, welcher $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{2n+1}\, a_{2n+1}$ zu einem Element der G_{2n+1}^{2n+1} ergänzt. Alsdann sind $(\rho_{2n}\, a_{2n})$ $(\rho_{2n+1}\, \rho_{2n+1})$ Punktepaare der gesuchten G_2^2 und der Schnittpunkt der Verbindungslinien dieser Paare ist derjenige Punkt, dessen Büschel die erwähnte Involution auf S ausschneidet.

Nach dem soeben und unter *D.* Gesagten kann folgendes Resultat ausgesprochen werden:

„Die Aufgabe, die zu einer Form iten Grades conjugirten Formen linear zu construiren, kann für $i=2n$, $i=2n+1$ (sobald $n > 2$) als erledigt angesehen werden, sobald sie für $i=2n-1$ gelöst ist. Da dies aber nach C für $n=3$ in der That der Fall ist, so ist die Aufgabe allgemein gelöst.“

§ 7.

Die projectivische Erzeugung der beigeordneten Curven, wie sie durch die Sätze *12* und *13* gegeben wird, gewinnt ein weitergehendes Interesse durch die merkwürdige Beziehung, in der die beiden auftretenden projectivischen Reihen: die Punktreihe und die Curvenschaar zu einander stehen. Bei der im Satz *13* erörterten Erzeugungsart entsteht die auftretende Schaar aus der Punktreihe, indem man zu jedem Punkte der Letzteren die Polare in Bezug auf eine bestimmte Curve 2ter Ordnung (nämlich den Kegelschnitt S) und zu jeder dieser Polaren wiederum die erste Polare in Bezug auf eine gewisse Klassencurve aufsucht.

Man kann nun allgemeiner eine Curve pter Ordnung C^p $(a_x^p = 0)$ und eine Curve qter Klasse K^q $(u_\alpha^q = 0)$ gegeben

denken; jede Curve rter Klasse $u_\vartheta^r = 0$ besitzt alsdann (wofern $r < p$ ist) eine bestimmte Curve (p—r)ter Ordnung als Polare (cfr. Einleitnng X.) in Bezug auf C^p und diese Curve (p—r)ter Ordnung bestimmt wiederum (wofern $p - r < q$ ist) eine gewisse Curve (q—p+r)ter Klasse als Polare in Bezug auf K^q. Die letztgenannte Klassencurve hat die Gleichung:

$$0 = a_\vartheta^p \; a_\alpha^{p-r} \; u_\alpha^{q-p+r} \tag{24}$$

und ich will sie als „correspondirende" Curve von u_ϑ^r in Bezug auf die beiden festen Curven bezeichnen.

Setzt man für $u_\vartheta^r = 0$ der Reihe nach die Curven einer Schaar:

$$0 = \varkappa u_\vartheta^r + \lambda u_\eta^r \tag{24a}$$

so bildet die Reihe der correspondirenden Curven eine zu jener Schaar projectivische Schaar von Curven (q—p+r)ter Klasse:

$$0 = \varkappa a_\vartheta^r \; a_\alpha^{p-r} \; u_\alpha^{q-p+r} + \lambda a_\eta^r \; a_\alpha^{p-r} \; u_\alpha^{q-p+r}. \tag{24b}$$

Das Erzeugniss dieser beiden projectivischen Reihen hat zur Gleichung das Eliminationsresultat von $\varkappa$ und λ aus (24a) und (24b):

$$0 = u_\omega^{q-p+2r} = \begin{vmatrix} u_\vartheta^r & u_\eta^r \\ a_\vartheta^r & a_\eta^r \end{vmatrix} a_\alpha^{p-r} \; u_\alpha^{q-p+r}. \tag{25}$$

Diese Curve geht, wenn $q - p + r = p - r$, d. h.

$$q = 2p - 2r$$

gesetzt wird, in eine Curve der pten Klasse über, und ihre Gleichung wird alsdann dargestellt durch:

$$0 = u_\omega^p = \begin{vmatrix} u_\vartheta^r & u_\eta^r \\ a_\vartheta^r & a_\eta^r \end{vmatrix} a_\alpha^{p-r} \; u_\alpha^{p-r}. \tag{26}$$

Bezeichnet nun b ein mit a gleichwerthiges Symbol und setzt man in die rechte Seite von (26) $u_i = b_i$ so ergiebt sich ein Ausdruck, der bei Vertauschung von a und b nur das Vorzeichen ändert; mithin ist:

$$b_\omega^p = 0.$$

Daraus folgt der *Satz*:

19. Liegt eine Curve $p$ter Ordnung und eine Curve $(2p-2r)$ter Klasse vor und construirt man in Bezug auf diese beiden zu einer Schaar von Curven $r$ter Klasse die Schaar der „correspondirenden" Curven, so ist das Erzeugniss dieser beiden projectivischen Schaaren eine Curve $p$ter Klasse, die zu der gegebenen Curve $p$ter Ordnung conjugirt ist.

Für $p = 2$ und $r = 1$ hat man eine Curve 2ter Ordnung C^2 und eine Curve 2ter Klasse K^2 festzulegen und zunächst zu den Punkten $p_1\ p_2 \ldots$ einer Punktreihe die Polaren $g_1\ g_2 \ldots$ in Bezug auf C^2 herzustellen, welche ein Strahlbüschel bilden. Die Pole von $g_1\ g_2 \ldots$ in Bezug auf den Kegelschnitt K^2 bilden alsdann eine Punktreihe $q_1\ q_2 \ldots$ und das Erzeugniss der projectivischen Punktreihen p und q ist zu C^2 conjugirt. Daraus folgt, dass, wenn man zu den Strahlen eines Strahlbüschels $(g_1\ g_2 \ldots)$ die Pole in Bezug auf 2 Kegelschnitte C^2 und K^2 construirt, das Erzeugniss der entstehenden projectivischen Punktreihen, als Klassencurve aufgefasst, zu C^2 als Ordnungscurve conjugirt ist. Da aber bei dieser Betrachtungsweise K^2 ganz dieselbe Rolle spielt wie C^2, so folgt, dass auch K^2, sobald es als Ordnungscurve angesehen wird, zu dem erzeugten Kegelschnitt conjugirt ist; es ergiebt sich demnach der *Satz:*

19a. Hat man 2 Kegelschnitte C_1 und C_2 und construirt man zu den Strahlen eines Strahlbüschels die Pole sowohl in Bezug auf C_1 als auch in Bezug auf C_2, so erhält man 2 projectivische Punktreihen. Das Erzeugniss K^1 derselben ist als Curve 2ter Klasse zu C_1 und C_2 conjugirt.

Ich füge folgenden geometrischen Beweis dieses Satzes hinzu:

Wenn y das Centrum des Strahlbüschels ist, so sind die Träger der beiden Punktreihen die Polaren $v_1\ v_2$ von y in Bezug auf C_1 resp. C_2 und jeder durch y gehenden Geraden X entspricht auf v_1 der Punkt x_1 als Pol von X in Bezug auf C_1 und auf v_2 der Punkt x_2 als Pol von X in Bezug auf C_2, so dass $(X, y x_1)$ ein conjugirtes Geradenpaar von C_1 und $(X, y x_2)$ ein ebensolches für C_2 ist.

Man verbinde nun beide Punktreihen mit y und suche die Doppelelemente der erhaltenen concentrischen projectivischen Büschel, d. h. die von y an K^1 gehenden Tangenten. Sind x_1 und x_2 2 entsprechende Punkte, die mit y in gerader Linie liegen, so ist die Gerade $x_1 x_2 = x_1 y = x_2 y$ ein Doppelelement; ich behaupte, dass alsdann X das 2te Doppelelement ist. In der That muss der Pol der Geraden $x_1 x_2$ in Bezug auf C_1 auf X liegen, und da er überdies auf v_1 liegen muss, mit $(X—v_1)$ identisch sein; ebenso ist $(X—v_2)$ der Pol der Geraden $x_1 x_2$ in Bezug auf C_2. Die Pole dieser Geraden liegen demnach mit y in gerader Linie und ihre Verbindungslinie X ist ein Doppelelement, wie behauptet wurde.

Wird also die eine der von y an K^1 gelegten Tangenten mit X bezeichnet, so ist die andere die Gerade $X^1 = yx_1 = yx_2$. Da aber, wie oben gezeigt (X, yx_1), und (X, yx_2) conjugirte Geradenpaare resp. von C_1 und C_2 sind, und y den Pol von v_1 in Bezug auf C_1 darstellt, so sieht man, dass XX^1v_1 ein Polardreieck von C_1 ist. Ebenso bilden die Geraden XX^1v_2 ein Polardreiseit von C_2. Da aber beide Dreiseite der Curve K^1 umschrieben sind, so folgt, dass K^1 in der That sowohl zu C_1 als zu C_2 conjugirt ist.

Ich kehre nunmehr zu der Gleichung (25) zurück. Die Curve, die sie repräsentirt, war das Erzeugniss einer Schaar von Curven $r$ter Klasse und der ihr „correspondirenden" Schaar unter Zugrundelegung 2er beliebigen Curven von resp. $p$ter Ordnung und $q$ter Klasse. Ich will nunmehr $r=1$ annehmen. Die Curve (25) geht alsdann über in:

$$0 = u_\omega^{q-p+2} \equiv \begin{vmatrix} u_\vartheta & u_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1}\, u_\alpha^{q-p+1}. \qquad (27)$$

Sobald $q-p+2 > p$ ist, folgt für beliebiges v und u die Identität:

$$v_\omega^p\, u_\omega^{q-2p+2} = \qquad (28)$$

$$\rho \begin{vmatrix} v_\vartheta & v_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1}\, v_\alpha^{p-1}\, u_\alpha^{q-2p+2} + \sigma \begin{vmatrix} u_\vartheta & u_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1}\, v_\alpha^{p}\, u_\alpha^{q-2p+1}$$

wobei ρ und σ gewisse Zahlenfactoren bedeuten. Ist nun

wiederum b ein mit a gleichwerthiges Symbol und setzt man $v_i = b_i$, so geht der erste Term der rechten Seite in einen Ausdruck über, der bei Vertauschung von a und b nur sein Zeichen wechelt, und also identisch verschwindet. Es folgt demnach die Identität in u:

$$b_\omega^p \, u_\omega^{q-2p+2} = \sigma \begin{vmatrix} u_\vartheta & u_\eta \\ a_\vartheta & a_\eta \end{vmatrix} a_\alpha^{p-1} \, b_\alpha^p \, u_\alpha^{q-2p+1}. \qquad (28a)$$

Man bemerke aber, dass die rechte Seite dieser Gleichung aus dem Ausdruck (27) für u_ω^{q-p+2} hervorgeht, indem man dort u_α^q durch $b_\alpha^p \, u_\alpha^{q-p}$ ersetzt, und dass die linke Seite die Polare von $b_x^p = 0$ in Bezug auf $u_\omega^{q-p+2} = 0$ vorstellt. Es folgt aus Alledem der *Satz:*

20. Wenn man eine beliebige Curve $p$ter Ordnung C^p und eine beliebige Curve $q$ter Klasse K^q zu Grunde legt (wobei $q > 2p-2$ sein soll) und zu den Punkten einer Punktreihe die Schaar der ihnen in Bezug auf C^p und K^q correspondirenden Curven construirt, so ist das Erzeugniss jener Punktreihe und dieser zu ihr projectivischen Schaar eine bestimmte Curve $(q-p+2)$ter Klasse. Die Polare von C^p in Bezug auf das Erzeugniss ist identisch mit dem analogen Erzeugniss, welches erhalten wird, wenn man K^q durch die Polare von C^p in Bezug auf K^q ersetzt.

Wenn indessen die Curve C^p zu K^q apolar ist, d. h. wenn $b_\alpha^p \, u_\alpha^{q-p}$ für jedes u verschwindet, so wird die rechte Seite von (28a) und mithin auch die linke für jedes Werthsystem der u annulirt, d. h. es sind auch u_ω^{q-p+2} und C^p zu einander apolar und es folgt:

21. Wenn man eine beliebige Curve $p$ter Ordnung C^p und eine zu ihr apolare Curve $q$ter Klasse K^q zu Grunde legt (wobei $q > 2p-2$ sein muss), so ist das Erzeugniss irgend einer Punktreihe und der ihr in Bezug auf C^p und K^q correspondirenden Schaar eine Curve $(q-p+2)$ter Klasse, welche zu C^p apolar ist.

Man überzeugt sich leicht, dass der wesentliche Inhalt des Satzes *13* ein specieller Fall desjenigen Satzes ist, der für

$p = 2$ aus *21* hervorgeht, und der sich auch in einer dem Theorem 19a ähnlichen Form folgendermassen aussprechen lässt:

21a. Hat man einen Kegelschnitt C^2 und eine zu C^2 apolare Curve $q$ter Klasse K^q, und construirt man zu den Strahlen eines Strahlbüschels die Pole in Bezug auf C^2 und die ersten Polaren in Bezug auf K^q, so ist das Erzeugniss der erhaltenen projectivischen Punktreihe und Curvenschaar eine Curve $q$ter Klasse, die zu C^2 apolar ist.

Aus der Ableitung der Sätze 19—21 ist klar, dass dieselben sich unmittelbar auf räumliche Verhältnisse übertragen lassen, indem man überall für Curve das Wort „Fläche", für Gerade aber „Ebene" substituirt; die Anführung dieser Sätze, ebenso wie der dual gegenüberstehenden kann demnach unterlassen werden.

§ 8.

Alles, was ich im Vorhergehenden für die binären Formen auf einem Kegelschnitt abgeleitet habe, findet sein genaues Analogon bei Betrachtung binärer Formen auf einer beliebigen Raumcurve dritter Ordnung C_3. Durch Beziehung auf ein geeignetes Coordinatensystem kann bekanntlich stets bewirkt werden, dass die Coordinaten der Punkte der C_3 sich als Functionen 2er homogener Parameter darstellen durch die Gleichungen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varkappa_1^3 : \varkappa_1^2 \varkappa_2 : \varkappa_1 \varkappa_2^2 : \varkappa_2^3. \tag{29}$$

Soll alsdann u die Verbindungsebene der Punkte $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\mu_1 \mu_2)$ $(\nu_1 \nu_2)$ sein, so müssen diese Parameterpaare Wurzeln der Gleichung:

$$0 = u_1 \varkappa_1^3 + u_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2 + u_3 \varkappa_1 \varkappa_2^2 + u_4 \varkappa_2^3$$

vorstellen, d. h. die Grössen u müssen den elementarsymmetrischen Functionen von $\lambda \mu \nu$ proportional sein, welche ich der Reihe nach mit $(\lambda \mu \nu)_1$ $(\lambda \mu \nu)_2$ $(\lambda \mu \nu)_3$ $(\lambda \mu \nu)_4$ bezeichnen will, so dass:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \lambda_2\mu_2\nu_2 : -(\lambda_2\mu_2\nu_1 + \lambda_2\nu_2\mu_1 + \mu_2\lambda_2\nu_1)$$
$$: (\lambda_2\mu_1\nu_1 + \mu_2\lambda_1\nu_1 + \nu_2\lambda_1\mu_1) : -\lambda_1\mu_1\nu_1$$
$$= (\lambda\mu\nu)_1 : (\lambda\mu\nu)_2 : (\lambda\mu\nu)_3 : (\lambda\mu\nu)_4. \qquad (30)$$

Daraus folgt wiederum, dass jede ganze homogene symmetrische Function von $\lambda\mu\nu$ als die linke Seite der Gleichung einer Klassenfläche angesehen werden kann, sobald man von den Gleichungen (30) Gebrauch macht.

Des Folgenden wegen mögen einige Gleichungsformen dieser Art hervorgehoben werden:

Sind $\rho\sigma\tau$ irgend 3 Punkte der C_3, so ist

$$0 = \Sigma(\rho\lambda)\ (\sigma\mu)\ (\tau\nu) \qquad (31)$$

wenn die Summe auf alle Vertauschungen von $\lambda\mu\nu$ sich erstreckt, die Gleichung des Schnittpunktes der Osculationsebenen von $\rho\sigma\tau$ (d. h. des Pols der Ebene $\rho\sigma\tau$ in Bezug auf C_3) wie man sofort bestätigt, indem man $\lambda=\mu=\nu=x$ setzt. Speciell ist demnach:

$$0 = \Sigma(\rho\lambda)\ (\sigma\mu)\ (\sigma\nu) \qquad (31a)$$
$$= 2\ [(\rho\lambda)\ (\sigma\mu)\ (\sigma\nu) + (\rho\mu)\ (\sigma\lambda)\ (\sigma\nu) + (\rho\nu)\ (\sigma\mu)\ (\sigma\lambda)]$$

die Gleichung des Punktes, in dem die Osculationsebene von ρ von der Tangente in σ getroffen wird, weil bekanntlich die Tangente eines Punktes als Schnittlinie 2er unendlich benachbarter Osculationsebenen angesehen werden darf.

Ich gehe nun dazu über, die Flächen nter Klasse zu betrachten, welche zu der Gesammtheit der durch die cubische Raumcurve gehenden Flächen nter Ordnung conjugirt sind und werde zeigen, dass sie eine den apolaren Curven eines Kegelschnitts analoge Bedeutung haben; ich will eine solche Fläche daher auch als eine zu der C_3 apolare Fläche bezeichnen.

Wenn $c_x^n \equiv (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4)^n = 0$ eine Fläche sein soll, die durch die C_3 hindurchgeht, so ist nach (29) hierzu nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung:

$$0 = (c_1x_1^3 + c_2x_1^2x_2 + c_3x_1x_2^2 + c_4x_2^3)^n \qquad (32)$$

für jedes x_1x_2 besteht. Aus dieser Identität können andere

durch Polarenbildung abgeleitet werden; ist eine solche:

$$0 = f\ (c_1\ c_2\ c_3\ \ x) \tag{33}$$

und setzen wir:

$$c_1 = (\lambda\mu\nu)_1 \quad c_2 = (\lambda\mu\nu)_2 \quad c_3 = (\lambda\mu\nu)_3 \quad c_4 = (\lambda\mu\nu)_4 \tag{34}$$

in die rechte Seite von (33) ein, so stellt das Resultat, gleich Null gesetzt:

$$0 = f\ [(\lambda\mu\nu)_1 \quad (\lambda\mu\nu)_2 \quad (\lambda\mu\nu)_3 \quad (\lambda\mu\nu)_4\ ,x] \tag{35}$$

für jeden wirklichen und symbolischen Werth von $x_1\ x_2$ eine Klassenfläche dar, die nach Gleichung (33) zu der Raumcurve apolar ist. Aber auch hier können wir die Operationen, welche auf (35) geführt haben, in umgekehrter Reihenfolge ausführen und auf (32) zuerst die Substitution (34) und dann die Polarenbildung anwenden. Da aber die rechte Seite von (32) durch die Substitution (34) in $(x\lambda)^n\ (x\mu)^n\ (x\nu)^n$ übergeht, so folgt das zu Satz *1* analoge Theorem:

22. Wenn man aus $(x\lambda)^n\ (x\mu)^n\ (x\nu)^n$ *durch Differentiation oder Polarenbildung nach* x *eine Form* $f\ (x\ \lambda\mu\nu)$ *abgeleitet hat, so stellt diese, sobald* $u_i = (\lambda\mu\nu)_i$ *gesetzt wird, für jeden wirklichen oder symbolischen Werth von* x *eine zu* C_3 *apolare Fläche dar.*

Ist demnach a_x^{3n} eine beliebige binäre Form $3n$ten Grades, und führt man $x_1 = a_2\ x_2 - - a_1$ in den Ausdruck $(x\lambda)^n\ (x\mu)^n\ (x\nu)^n$ ein, so ergiebt sich:

$$a_\lambda^n\ a_\mu^n\ a_\nu^n = 0 \tag{36}$$

als Gleichung einer zu C_3 apolaren Fläche $n$ter Klasse, welche die Osculationsebenen in den Punkten der binären Form a_x^{3n} berührt.

Da jede Fläche $c_x^n = 0$, welche die Raumcurve enthält, der Identität (32), also $(3n+1)$ linearen Bedingungen und nur diesen zu genügen hat, so bilden alle Flächen dieser Eigenschaft eine $\left[\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{1.\ 2.\ 3} - 3n - 1\right]$-gliedrige Gruppe. Dieser steht demnach eine $(3n+1)$-gliedrige Gruppe von Klassenflächen als conjugirte Gruppe gegenüber, in der offenbar alle zu C_3 apolaren Flächen und nur diese enthalten sind.

Daraus folgt, dass eine zu der C_3 apolare Fläche n ter Klasse durch 3n weitere Bedingungen vollständig festgelegt ist.

Wird insbesondere gefordert, dass eine Fläche n ter Klasse zu C_3 apolar sein und die Osculationsebenen in 3n bestimmten Punkten der Curve berühren soll (deren binäre Form durch a_x^{3n} bezeichnet werde), so kann in vollständiger Uebereinstimmung mit der auf Seite 9 angewandten Methode gezeigt werden, dass die $\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{1.\ 2.\ 3.} - 1$ linearen Bedingungsgleichungen, welchen die Coefficienten der Fläche alsdann unterworfen sind, niemals von einander abhängig sein können, wie immer auch a_x^{3n} beschaffen sein möge:

Es giebt demnach stets eine und nur eine Fläche n ter Klasse, die zu C_3 apolar ist und die Osculationsebenen in den Punkten einer gegebenen binären Form a_x^{3n} berührt. Ich nenne sie die „beigeordnete" Fläche der Form. Ihre Gleichung ist durch $a_\lambda^n\ a_\mu^n\ a_\nu^n = 0$ gegeben.

Man kann nunmehr folgende den Theoremen 2, 4 und 5 analogen Sätze beweisen:

23. Die erste Polare einer Ebene $\rho\ \sigma\ \tau$ in Bezug auf $a_\lambda^n\ a_\mu^n\ a_\nu^n = 0$ ist identisch mit der beigeordneten Fläche von $a_\rho\ a_\sigma\ a_\tau\ a_x^{3n-3}$.

24. Haben wir 3n Punkte der C_3, deren binäre Form zu a_x^{3n} conjugirt ist, so ist jede durch diese Punkte gehende Fläche n ter Ordnung zu $a_\lambda^n\ a_\mu^n\ a_\nu^n = 0$ conjugirt.

25. Wenn durch 3n Punkte der C_3 eine Fläche n ter Ordnung gelegt werden kann, die zu $a_\lambda^n\ a_\mu^n\ a_\nu^n = 0$ conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Fläche dieselbe Eigenschaft und die binäre Form der 3n Punkte ist zu a_x^{3n} conjugirt.

Der Beweis dieser Sätze ist dem Beweise der entsprechenden Sätze für die Ebene ganz analog.

Auch hier kann jeder Form 3nten Grades nicht nur eine Klassen-, sondern auch eine Ordnungsfläche beigeordnet werden; nämlich diejenige Ordnungsfläche, welche durch die 3n Punkte der Form hindurchgeht und zu der C_3 als Klassencurve apolar, d. h. zu allen denjenigen Flächen n ter Klasse conjugirt ist, welche

sämmtliche Osculationsebenen der C_3 berühren. Aus dieser Bemerkung folgt, dass die Sätze *24* und *25* auch folgendermassen ausgesprochen werden können:

24a. Haben wir 2 conjugirte binäre Formen 3nter Ordnung, so ist die beigeordnete Ordnungsfläche der einen zur beigeordneten Klassenfläche der andern conjugirt.

25a. Wenn 2 binäre Formen 3nter Ordnung so beschaffen sind, dass die beigeordnete Ordnungsfläche der einen zur beigeordneten Klassenfläche der andern conjugirt ist, so sind die binären Formen selbst conjugirt.

Um ein dem Satz *7* entsprechendes Theorem zu erhalten, bemerke man, dass jeder G_p^{3n} von Formen eine G_{3n+1-p}^{3n} von conjugirten Formen gegenüber steht. Jeder Form der letzteren Gruppe ist eine Klassenfläche beigeordnet und der so erhaltenen $(3n+1-p)$-gliedrigen Gruppe Γ von Flächen nter Klasse steht eine $\left[\frac{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{1.\ 2.\ 3.} - 3n - 1 + p\right]$-gliedrige Gruppe von Flächen nter Ordnung gegenüber. Jede Fläche, welche dieser letzten Gruppe G angehört und die C_3 nicht in sich enthält, muss nach *25* ein Element der gegebenen G_p^{3n} ausschneiden; umgekehrt muss jede Fläche nter Ordnung, welche durch die 3n Punkte eines Elements der G_p^{3n} hindurchgeht, zu allen Flächen von Γ conjugirt sein und mithin der Gruppe G angehören. Es folgt also:

26. Haben wir auf der C_3 $(p+1)$ Formen derselben G_p^{3n} und legen wir durch die $3n$ Punkte einer jeden Form irgend eine Fläche nter Ordnung, so bilden die so erhaltenen $(p+1)$ Flächen zusammen mit der Gruppe der die Raumcurve enthaltenden Flächen, nicht eine $\left[\binom{n+3}{3} - 3n - 1 + p + 1\right]$- sondern nur eine $\left[\binom{n+3}{3} - 3n - 1 + p\right]$- gliedrige Gruppe.

Um schliesslich entsprechende Sätze für Formen $(3n+1)$ten Grades abzuleiten, muss man auf die ersten Polaren derselben und auf die beigeordneten Flächen dieser Polaren die Theoreme 24 und 25 in Anwendung bringen; desgleichen hat man bei Formen $(3n+2)$ten Grades die gemischten 2ten Polaren dieser

Formen und ihre beigeordneten Flächen zu betrachten. Dadurch ergeben sich folgende Sätze:

27. Zu jeder Form $(3n+1)$ten Grades a_x^{3n+1} gehört eine „beigeordnete" Flächenschaar $a_\sigma\, a_\lambda^n\, a_\mu^n\, a_\nu^n = 0$ derart, dass jedem Punkte σ der C_3 eine Fläche der Schaar zugehört. Ist die binäre Form von $(3n+1)$ Punkten zu a_x^{3n+1} conjugirt, so ist jede Fläche nter Ordnung, welche durch $3n$ dieser Punkte geht, zu derjenigen Fläche der Schaar conjugirt, welche dem $(3n+1)$ten Punkte zugehört.

28. Wenn durch $3n$ Punkte eine Fläche gelegt werden kann, welche zu $a_\sigma\, a_\lambda^n\, a_\mu^n\, a_\nu^n = 0$ conjugirt ist, so hat jede durch diese Punkte gehende Fläche dieselbe Eigenschaft und die $3n$ Punkte, zusammen mit σ bilden eine binäre Form, die zu a_y^{3n+1} conjugirt ist.

29. Zu jeder Form $(3n+2)$ten Grades a_y^{3n+2} gehört ein „beigeordnetes" Flächengewebe $a_\sigma\, a_\tau\, a_\lambda^n\, a_\mu^n\, a_\nu^n = 0$ derart, dass irgend 2 Punkten $\sigma\tau$ der Raumcurve eine bestimmte Fläche des Gewebes zugehört. Ist die binäre Form von $(3n+2)$ Punkten zu a_x^{3n+2} conjugirt, so ist jede Fläche nter Ordnung, welche durch $3n$ dieser Punkte hindurchgeht, zu derjenigen Fläche des Gewebes conjugirt, welche den beiden übrigen Punkten zugeordnet ist.

30. Wenn durch $3n$ Punkte eine Fläche gelegt werden kann, die zu $a_\sigma\, a_\tau\, a_\lambda^n\, a_\mu^n\, a_\nu^n = 0$ conjugirt ist, so bilden die $3n$ Punkte, mit $\sigma\tau$ vereinigt, eine binäre Form, die zu a_x^{3n+2} conjugirt ist.

§ 9.

Eine weitere Anwendung des Satzes 22 führt mich auf Resultate, welche mit dem Inhalte der Sätze 12 und 13 correspondiren. Ich wende auf $\varphi = (x\lambda)^n\,(x\mu)^n\,(x\nu)^n$ die Operation $\rho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \rho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ an und erhalte:

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\rho_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\rho_2\right\} = [(x\lambda)^{n-1}(x\mu)^{n-1}(x\nu)^{n-1}] \sum_3 (\rho\lambda)\,(x\mu)\,(x\nu) \quad (37)$$

wobei die Zahl unter dem Summenzeichen die Anzahl der

Summanden angiebt. Ist nun a_x^{3n-1} eine beliebige binäre Form $(3n-1)$ten Grades, und setze ich in (37) rechts $x_1 = a_2\ x_2 = -a_1$, so folgt aus Satz 22, dass

$$a_\lambda^{n-1}\ a_\mu^{n-1}\ a_\nu^{n-1}\ \sum_3 (\rho\lambda)\ a_\mu\ a_\nu = 0 \qquad (38)$$

die Gleichung einer zu C_3 apolaren Fläche ist, sobald $(\lambda\mu\nu)_i = u_i$ gesetzt wird. Offenbar ist es die der Form $(\rho x)\ a_x^{3n-1}$ beigeordnete Fläche $n$ter Klasse.

Die Gleichung (38) geht jedoch aus:

$$a_\lambda^{n-1}\ a_\mu^{n-1}\ a_\nu^{n-1}\ a_\sigma\ a_\tau = 0 \qquad (39a)$$

hervor, sobald man die Identität in $x_1\ x_2$

$$(x\sigma)\ (x\tau) = \sum_3 (\rho\lambda)\ (x\mu)\ (x\nu)$$

gelten lässt; d. h. wenn man annimmt, dass die 2 Gleichungen bestehen:

$$\sum_3 (\rho\lambda)\ (\sigma\mu)\ (\sigma\nu) = 0 \qquad (39b)$$

$$\sum_3 (\rho\lambda)\ (\tau\mu)\ (\tau\nu) = 0 \qquad (39c)$$

(38) ist also das Resultat der Elimination von $\sigma\tau$ aus 39a, b und c. Für $(\lambda\mu\nu)_i = u_i$ ist aber nach einer auf Seite 40 gemachten Bemerkung (39b) die Gleichung des Punktes, in dem die Osculationsebene von ρ die Tangente in σ trifft und ebenso ist 39c der Schnittpunkt der Schmiegungsebene von ρ mit der Tangente in τ. Da die Bedeutung von 39a unmittelbar klar ist, so folgt:

31. Wenn eine binäre Form $(3n-1)$ten Grades a_x^{3n-1} vorliegt, und wir fügen derselben einen beliebigen Punkt σ hinzu, so erhalten wir eine Form $3n$ten Grades, der eine bestimmte Fläche $n$ter Klasse beigeordnet ist. Diese Fläche kann folgendermassen erhalten werden: Jeder Punkt σ bestimmt auf der Osculationsebene von ρ (O_ρ) einen Punkt s, als Schnittpunkt von O_ρ mit der Tangente in σ; jedem Punktepaar $\sigma\tau$ gehört also eine bestimmte Gerade st in O_ρ zu und umgekehrt gehört zu jeder Geraden in O_ρ nur ein Punktepaar $\sigma\tau$. Zu jedem Paar $\sigma\tau$ gehört aber auch eine Fläche des der Form a_x^{3n-1} beigeordneten

Gewebes. Jene Gerade st und diese Fläche sind also einander projectivisch zugeordnet[16]) *und die Fläche K ist das Erzeugniss dieser projectivischen Gebilde, d. h. sie ist der Ort der Tangentialebenen, welche von jeder Geraden an die entsprechende Fläche gelegt werden können.*

Wenn eine Form 3nten Grades a_x^{3n} gegeben ist, so kann der eben ausgesprochene Satz auf die Form $a_\rho a_x^{3n-1}$ angewandt werden und führt alsdann zur Erzeugung der Fläche, welche der Form $(\rho x)\ a_\rho\, a_x^{3n-1}$ beigeordnet ist, oder, was dasselbe sagt, der Fläche, welche dem Punkte ρ innerhalb der beigeordneten Flächenschaar von $(\rho x)\, a_x^{3n}$ zugehört. Bemerkt man überdies, dass das der Form $a_\rho\, a_x^{3n-1}$ beigeordnete Gewebe $a_\rho\, a_\sigma\, a_\tau\, a_\lambda^{n-1}\, a_\mu^{n-1}\, a_\nu^{n-1} = 0$ nach Satz 23 aus den ersten Polaren der durch ρ gehenden Ebenen in Bezug auf $a_\lambda^n\, a_\mu^n\, a_\nu^n = 0$ besteht, so folgt der *Satz:*

32. Es sei eine binäre Form a_x^{3n} mit der beigeordneten Fläche K gegeben. Ist ρ ein beliebiger Punkt der C_3, so ist der binären Form $(\rho x)\ a_x^{3n}$ eine Flächenschaar beigeordnet und dem Punkte ρ gehört eine bestimmte Fläche K_ρ derselben zu. K_ρ kann nun folgendermassen erhalten werden: Zu jedem Punktepaar $\sigma\tau$ der Curve gehört, wie unter 31 auseinandergesetzt wurde, eine Gerade der Ebene O_ρ; weiterhin aber kann dem Paare $\sigma\tau$ diejenige Fläche $(n-1)$ter Ordnung zugeordnet werden, welche erste Polare der Ebene $\rho\sigma\tau$ in Bezug auf K ist. Diese Fläche und jene Gerade sind projectivisch zugeordnet und das Erzeugniss der so entstehenden projectivischen Gebilde ist die Fläche K_ρ.

Wenn endlich eine Form $(3n+1)$ten Grades vorliegt, so muss man den Satz 32 für die erste Polare eines Punktes ρ anwenden; man erhält alsdann:

33. Es sei eine Form a_x^{3n+1} gegeben und K_ρ sei diejenige Fläche, welche innerhalb der der Form beigeordneten Schaar dem Punkte ρ zugehört. Innerhalb des der Form $(\rho x)\ a_x^{3n+1}$ beigeordneten Gewebes möge dem 2fach gezählten Punkte ρ die Fläche

---

[16]) „Zuordnung nach dem Typus der Reciprocität"
cfr. Salmon-Fiedler. Geom. des Raumes. Th. II. S. 7.

$K_{\rho\rho}$ entsprechen. Diese Letztere kann folgendermassen erzeugt werden: Man ordne die dem Punktepaar $\sigma\tau$ auf O_ρ zugehörige Gerade st der ersten Polaren der Ebene $(\rho\sigma\tau)$ in Bezug auf K_ρ zu, indem man alsdann $\sigma\tau$ variirt, erhält man 2 projectivisch zugeordnete Gebilde, deren Erzeugniss die Curve $K_{\rho\rho}$ ist.

Man kann auch hier, in Uebereinstimmung mit der entsprechenden Bemerkung für den Kegelschnitt, hervorheben, dass durch die 3 letzten Sätze die Construction der beigeordneten Flächen, Flächenschaaren und Gewebe im Princip erledigt ist. Nehmen wir nämlich an, dass man in der Lage sei, zu jeder Form 3nten Grades die beigeordnete Fläche zu construiren, so kann man nach Satz 32, wenn eine Form $(3n+1)$ten Grades a_χ^{3n+1} vorliegt, zu jedem der $(3n+1)$ Punkte der Form diejenige Fläche herstellen, welche ihm innerhalb der beigeordneten Flächenschaar von a_χ^{3n+1} zugehört. Dadurch ist aber zugleich die projectivische Beziehung zwischen den Punkten der Curve und den Flächen der Flächenschaar festgelegt, da $3n+1$ stets grösser als 3 ist; man kann also zu jedem Punkte der C_3 die zugehörige Fläche der Schaar construiren.

Da man nunmehr zu jeder Form $(3n+1)$ten Grades die beigeordnete Schaar und ihre Zuordnung zu den Punkten der C_3 bestimmen kann, so darf der Satz 33 in Anwendung gebracht werden; dieser führt zur Construction des beigeordneten Gewebes einer beliebigen Form $(3n+2)$ten Grades a_χ^{3n+2}, da man in der Lage ist, zu $(3n+2)$ Punktepaaren (nämlich den doppelt gezählten Punkten der Form selbst) die innerhalb des Gewebes zugehörigen Flächen zu construiren. Die eindeutige Beziehung zwischen den Punktepaaren der C_3 und den Flächen des Gewebes kann aber stets auf die reciproke Zuordnung 2er Ebenen zurückgeführt werden, und da $3n+2$ stets grösser als 4 ist, so ist auch jene Beziehung direct bestimmbar. Jetzt darf der Satz 31 benutzt werden, der die Construction derjenigen Fläche ergiebt, welche einer beliebigen Form $(3n+3)$ten Grades beigeordnet ist.

Man sieht also, dass man alle beigeordneten Flächen, Flächenschaaren und Flächengewebe von Formen höheren Grades herstellen kann, sobald man weiss, wie zu jeder Form

3nten Grades die beigeordnete Fläche zu construiren ist. Da man dies aber für $n = 1$ in der That weiss, so ist die obige Behauptung erwiesen.

§ 10.

Die beigeordneten Flächen können, wie soeben gezeigt wurde, durch gewisse projectivische Reihen erzeugt werden. Die Zuordnung, welche dabei auftritt, ist von der Art, dass immer 2 Punkten einer Ebene E eine Fläche eines Gewebes und umgekehrt entspricht. Wenn daher alle Punkte der Ebene, resp. alle Flächen des Gewebes durch die Gleichungen:

$$u_A + \Lambda u_B + M u_\Gamma = 0 \tag{40a}$$

$$u_\alpha^n + \lambda u_\beta^n + \mu u_\gamma^n = 0 \tag{40b}$$

dargestellt werden, so muss irgend 2 Werthepaaren von Λ, M ein Werthepaar $\lambda\mu$ zugehören und umgekehrt, d. h. die Zuordnung der beiden Gewebe muss vermittelt werden durch eine Gleichung von der Form:

$$(a\Lambda + bM + c)\lambda + (d\Lambda + eM + f)\mu + (g\Lambda + hM + k) = 0.$$

Die durch diese Zuordnung erzeugte Fläche, d. h. die Einhüllende der Tangentialebenen, welche von jedem Punktepaar, oder, was dasselbe ist, von jeder Geraden an die entsprechende Fläche gelegt werden können, hat demnach die Gleichung:[17])

$$0 = u_\delta^{n+1} \equiv \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha^n \\ d & e & f & u_\beta^n \\ g & h & k & u_\gamma^n \\ u_A & u_B & u_\Gamma & 0 \end{vmatrix}. \tag{40}$$

Ich will, wenn $g_1\, g_2\, g_3 \ldots$ die Geraden der Ebene E und $K_1^n\, K_2^n\, K_3^n \ldots$ die entsprechenden Flächen des Gewebes bedeuten, das Erzeugniss dieser Zuordnung, also die Fläche (40) mit $(g - K^n)$ bezeichnen. Ausserdem soll, wenn K irgend eine

[17]) Salmon-Fiedler. Geometrie des Raumes. Th. II. S. 7.

Klassenfläche ist, die Polare der Ebene v in Bezug auf K mit K_v bezeichnet werden.

Aus (40) ergiebt sich nun durch Polarenbildung die für jedes u und v giltige Gleichung:

$$(n+1)\,u_\delta^n v_\delta = \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha^n \\ d & e & f & u_\beta^n \\ g & h & k & u_\gamma^n \\ v_A & v_B & v_\Gamma & 0 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha^{n-1} v_\alpha \\ d & e & f & u_\beta^{n-1} v_\beta \\ g & h & k & u_\gamma^{n-1} v_\gamma \\ u_A & u_B & u_\Gamma & 0 \end{vmatrix} \qquad (41)$$

Die erste Determinante der rechten Seite stellt offenbar, gleich Null gesetzt, diejenige Fläche des Gewebes vor, welche der Schnittgeraden von E und v entspricht, und wir sehen also, dass diese Fläche, zusammen mit den Flächen $(g—K^n)_v$ und $(g—K_v^n)$ derselben Schaar angehört.

Aus dieser Bemerkung resultirt die Lösung der folgenden Aufgabe:

34. Ein Gewebe von Flächen pter Klasse ($K_1^p K_2^p \ldots$) sei nicht selbst gegeben, aber es sei möglich, zu jeder einzelnen Fläche sämmtliche conjugirte p-Flache linear zu construiren.[18]) *Den Flächen des Gewebes seien die Geraden ($g_1 g_2 \ldots$) einer Ebene E projectivisch zugeordnet. Es sollen sämmtliche conjugirte ($p+1$)-Flache von ($g—K^p$) hergestellt werden.*

Ich nehme an, die Aufgabe sei für $p=n-1$ gelöst. Um alsdann für den Fall $p=n$ den Punkt $(g—K^n)_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ d. h. die gemischte Polare der n Ebenen $u_1 u_2 \ldots u_n$ in Bezug auf die Fläche $(g—K^n)$ zu construiren, stelle ich folgende 2 Punkte her:

1) den Punkt $(g—K_{u_1}^n)_{u_2 \ldots u_n}$, welcher nach der eben gemachten Annahme linear construirbar ist;

2) den Polarpunkt von $u_2 \ldots u_n$ in Bezug auf diejenige Fläche des Gewebes, welche der Schnittgeraden (u_1, E) entspricht. Dieser Punkt ist nach den Voraussetzungen der Aufgabe selbst construirbar.

---

[18]) Darunter soll stets verstanden werden, dass man die gemischte Polare von irgend (p—1) Ebenen in Bezug auf die Fläche linear construiren könne.

Der gesuchte Punkt $(g - K^n)_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ liegt nun nach dem Obigen auf der Verbindungslinie der Punkte (1) und (2). Aber diese Gerade wurde durch Hervorhebung von u_1 aus der Reihe der Ebenen $u_1 u_2 \ldots u_n$ erhalten; verfährt man ebenso mit u_2, so resultirt eine 2te Gerade, welche der ersten in dem gesuchten Punkte begegnet.

Die Aufgabe (34) ist demnach für $p = n$ gelöst, sobald man ihre Lösung für $p = n - 1$ kennt; sie ist also allgemein gelöst, weil die gewünschte Construction für $p = 1$ keine Schwierigkeit bietet. Für $n = 1$ geht nämlich die Gleichung (41) über in:

$$2\, u_\delta\, v_\delta = \begin{vmatrix} a & b & c & u_\alpha \\ d & e & f & u_\beta \\ g & h & k & u_\gamma \\ v_A & v_B & v_\Gamma & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & v_\alpha \\ d & e & f & v_\beta \\ g & h & k & v_\gamma \\ u_A & u_B & u_\Gamma & 0 \end{vmatrix} = -u_x + u_X. \quad (42)$$

Ist demnach e die Ebene von $u_\alpha = 0$ $u_\beta = 0$ $u_\gamma = 0$ oder, was dasselbe ist, von $K_1^1 K_2^1 \ldots$, so liegt der Punkt $(g - K^1)_v$ auf der Geraden, welche den Punkt x, der (v, E) innerhalb e entspricht, mit dem Punkt X verbindet, der (v, e) innerhalb E zugehört. Aber weil:

$$u_x - u_X = 0$$

die Gleichung des Punktes z ist, in dem die Gerade xX von v getroffen wird, so ist der gesuchte Punkt $(g - K^1)_v$ der vierte harmonische des Punktes z in Bezug auf x und X.

Die Aufgabe 34 ist demnach für $p = 1$ gelöst und ihre allgemeine Lösung ist auf eine Reihenfolge bekannter Constructionen zurückgeführt.

§ 11.

Constructionen auf der cubischen Raumcurve.

A. Formen dritten Grades.[19])

I. Sind 1, 2, 3 die Punkte der binären Form a_x^3, so wird der der Form „beigeordnete" Punkt (Fläche erster Klasse)

[19]) Sturm, Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journal. Bd. 86.

erhalten als Schnittpunkt der Ebene $O_1 O_2 O_3$, wenn O_ρ allgemein die Osculationsebene des Punktes ρ angiebt. Der beigeordnete Punkt, den ich mit p_{123} bezeichnen will, ist (nach Satz 24) Centrum des Bündels derjenigen Ebenen, welche C_3 in drei Punkten treffen, deren binäre Form zu a_χ^3 conjugirt ist.

Als speciellen Fall hebe ich die im Folgenden zu benutzende Construction der ersten Polare eines Punktes ρ in Bezug auf a_χ^3 hervor: Man ziehe $\overline{\rho p_{123}}$ und bestimme die 2 Tangenten, welche ausser der Tangente in ρ dieser Geraden begegnen. Sind dieselben $t_\sigma\, t_\tau$ (wobei t_ρ allgemein die Tangente des Punktes ρ angiebt), so sind $\sigma\tau$ die Punkte der gesuchten ersten Polare.

II. Bestehen die beiden Formen $a_\chi^3\, b_\chi^3$ resp. aus den Punkten (1 2 3) (I. II. III.), so ist die Verbindungslinie von p_{123} und $p_{\text{I. II. III.}}$ die Axe des Büschels, dessen Ebenen die Elemente der zu a_χ^3 und b_χ^3 conjugirten G_2^3 auf der Curve ausschneiden.

Wie alle Elemente einer durch 2 ihrer Formen gegebenen G_2^3 und einer durch 3 ihrer Formen gegebenen G_3^3 zu construiren sind, ist unmittelbar klar.

B. Vorbemerkungen für die folgenden Constructionen.

Wenn im Folgenden gesagt wird, dass „man eine G_n^n construiren könne", oder dass es „möglich sei, alle Elemente dieser G_n^n zu construiren", so soll (ebenso wie früher) darunter verstanden werden, dass die Aufgabe gelöst ist, zu irgend (n—1) Punkten denjenigen Punkt zu finden, welcher sie zu einem Element der G_n^n ergänzt. Offenbar ist:

(1.) die Construction einer G_n^n ausgeführt, wenn man zu irgend $(n-3)$ Punkten die ihnen innerhalb der G_n^n zugehörige G_3^3 construiren kann; d. h. wenn man den Punkt angeben kann, dessen Ebenenbündel diese G_3^3 auf der Curve ausschneidet.

(2.) Man kann eine G_{3n+1}^{3n+1} construiren, sobald man die zu irgend 3 Punkten innerhalb derselben einzeln zugehörigen drei G_{3n}^{3n} construiren kann;

denn sind diese Punkte $\alpha\beta\gamma$, und will man die zu den beliebigen Punkten $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-2}$ gehörige G_3^3 ermitteln, so bestimme man, was nach der gemachten Annahme möglich ist:

irgend ein Punktepaar $\alpha_1\,\alpha_2$ welches mit $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-2}\alpha$ zusammen
irgend ein Punktepaar $\beta_1\,\beta_2$ „ „ $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-2}\beta$ „
dto. dto. $\gamma_1\,\gamma_2$ „ „ $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-2}\gamma$ „

je ein Element der G_{3n+1}^{3n+1} bildet. Da alsdann die Punktetripel $(\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2)$ $(\beta\,\beta_1\,\beta_2)$ $(\gamma\,\gamma_1\,\gamma_2)$ der gesuchten G_3^3 angehören, so ist dieselbe vollständig bestimmt, und nach (1) ist also die Construction der G_{3n+1}^{3n+1} ausgeführt.

(3.) Die Construction einer G_{3n+2}^{3n+2} ist ausgeführt, sobald man die zu irgend 3 Punktepaaren gehörigen drei G_{3n}^{3n} herstellen kann;

denn sind diese Punktepaare $\alpha_1\,\alpha_2$ $\beta_1\,\beta_2$ $\gamma_1\,\gamma_2$ und will man die zu den beliebigen Punkten $\rho_1 \ldots \rho_{3n-1}$ gehörige G_3^3 bestimmen, so construire man:

den Punkt α, welcher $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-1}\,\alpha_1\,\alpha_2$,
d. P. β, „ $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-1}\,\beta_1\,\beta_2$,
d. P. γ, „ $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_{3n-1}\,\gamma_1\,\gamma_2$

zu je einem Element der G_{3n+2}^{3n+2} ergänzt. Die gesuchte G_3^3 ist alsdann durch die 3 Elemente $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha)$ $(\beta_1\beta_2\beta)$ $(\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma)$ vollständig festgelegt, was zu zeigen war.

C. Formen vierten Grades.

I. Die Form a_x^4 bestehe aus den Punkten 1 2 3 4. Derselben ist eine Punktreihe P beigeordnet, derart, dass jedem Punkte o der C_3 ein Punkt p_ρ der Punktreihe entspricht; p_ρ selbst ist alsdann das Centrum desjenigen Ebenenbündels, welches die innerhalb der conjugirten G_4^4 zu ρ gehörige G_3^3 auf der Curve ausschneidet.

Die Punkte $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ sind sofort zu construiren; um z. B. p_4 zu erhalten, bestimme man den Puunkt p_{123} (cfr. A. I.) und verbinde ihn mit 4. Die 2 nicht durch den Punkt 4 gehenden

Tangenten, welche der Verbindungslinie begegnen, seien t_σ und t_τ. Dann ist der Schnittpunkt von $O_4\, O_\sigma\, O_\tau$ der gesuchte Punkt p_4; denn nach A. I. ist $\sigma\tau$ die erste Polare von 4 in Bezug auf die binäre Form der Punkte (1 2 3), also $4\sigma\tau$ die erste Polare von 4 in Bezug auf a_x^4, und es geht mithin jede der Ebenen $O_4\, O_\sigma\, O_\tau$ in der That durch den Punkt p_4.

Daraus folgt, dass man die dreigliedrigen Gruppen construiren kann, welche innerhalb der zu a_y^4 conjugirten G_4^4 den einzelnen Punkten 1, 2, 3, 4 zugehören; nach B. 2. ist demnach überhaupt die Construction dieser G_4^4 ausgeführt.

Die zu a_x^4 apolaren Formen dritten Grades bilden eine G_2^3. Diese wird offenbar auf C_3 von dem Ebenenbüschel ausgeschnitten, welches die Gerade P zur Axe hat.

II. Zwei Formen $a_x^4\, b_x^4$ steht eine G_3^4 als conjugirt gegenüber. Die beigeordneten Punktreihen von a_x^4 und b_x^4 seien resp. $(p_1\, p_2 \ldots p_\rho \ldots)$ $(q_1\, q_2 \ldots q_\rho \ldots)$. Um 2 Punkte $\rho\, \sigma$ zu einem Element der G_3^4 zu ergänzen, bestimme man die Ebene $\sigma\, p_\rho\, q_\rho$. Diese schneidet die Curve in noch 2 Punkten $\tau\omega$ von der Beschaffenheit, dass $\rho\sigma\tau\omega$ ein Quadrupel der G_3^4 ist.

Die Geraden $p_\rho\, q_\rho$ sind die geraden Erzeugenden eines Hyperboloids, welches die Eigenschaft hat, die Seiten aller Tetraeder zu berühren, deren Ecken ein Quadrupel der G_3^4 bilden. Diese Fläche 2ten Grades hat für die 3-gliedrige Gruppe auf der C_3 analoge Bedeutung, wie die Involutionscurve für die Involution auf einem Kegelschnitt.

III. Nicht minder leicht wird die G_2^4 construirt, welche zu 3 Formen $a_x^4\, b_x^4\, c_x^4$ conjugirt ist, deren beigeordnete Punktreihen resp. $(p_1\, p_2 \ldots p_\rho \ldots)$ $(q_1\, q_2 \ldots q_\rho \ldots)$ $(r_1\, r_2 \ldots r_\rho \ldots)$ sein mögen. Die Ebene $p_\rho\, q_\rho\, r_\rho$ schneidet C_3 in 3 Punkten, welche mit ρ zusammen ein Element der G_2^4 bilden.

D. Formen fünften Grades.

Es sei eine binäre Form 5ten Grades a_x^5 gegeben, welche aus den Punkten 1 2 3 4 5 bestehe. Derselben ist eine Ebene E

von Punkten derart beigeordnet, dass zu jedem Punktepaar $\rho\sigma$ der C_3 ein bestimmter Punkt $q_{\rho\sigma}$ von E gehört, der Centrum desjenigen Ebenenbündels ist, welches die zu $\rho\sigma$ innerhalb der conjugirten G_5^5 gehörige G_3^3 auf der Raumcurve ausschneidet.

Um den Punkt q_{55} zu erhalten, welcher dem doppelt gezählten Punkte 5 entspricht, construire man die beigeordnete Punktreihe P der Form (1 2 3 4) und fixire den innerhalb derselben zu 5 gehörigen Punkt p_5. Die Verbindungslinie $5p_5$ begegne den beiden nicht durch 5 gehenden Tangenten $t_\sigma\, t_\tau$; alsdann ist der Schnittpunkt von $O_5\, O_\sigma\, O_\tau$ der gesuchte Punkt q_{55}. In der That ist nach den unter A. und C. angegebenen Constructionen $(5\sigma\tau)$ die 2te Polare des Punktes 5 in Bezug auf a_χ^5 und die Ebenen $O_5\, O_\sigma\, O_\tau$ gehen demnach durch q_{55} hindurch. In derselben Weise aber kann man $q_{44}\, q_{33}\, q_{22}\, q_{11}$ herstellen; d. h. man kann die zu 5 Punktepaaren innerhalb der conjugirten G_5^5 gehörigen dreigliedrigen Gruppen construiren. Die Construction der G_5^5 selbst ist damit nach B. 3. erledigt.

Hieraus ist unschwer die Construction der zu 2 und 3 Formen 5ten Grades conjugirten G_4^5 und G_3^5 abzuleiten.

E. Formen sechsten Grades.

Sind 1 2 3 4 5 6 die Punkte der binären Form a_χ^6, E die nach D. zu construirende beigeordnete Ebene der Form (1 2 3 4 5) und $q_{\rho\sigma}$ der zu dem Punktepaar $\rho\sigma$ gehörige Punkt von E, so wird nach Satz *31* die beigeordnete Fläche K von a_χ^6 auf folgende Weise erhalten: Auf O_6 schneiden $t_\rho\, t_\sigma$ 2 Punkte rs aus, deren Verbindungslinie $g_{\rho\sigma}$ heissen soll. K ist alsdann das Erzeugniss der Zuordnung von $g_{\rho\sigma}$ und $q_{\rho\sigma}$ und man kann demnach, wie im § 10 hervorgehoben wurde, den Polarpunkt irgend einer Ebene in Bezug auf K linear construiren. Ist die Ebene die Verbindungsebene von 3 beliebigen Punkten $a_1\, a_2\, a_3$ der C_3, so ist der Polarpunkt Centrum des Bündels,

dessen Ebenen diejenige G_3^3 auf der Curve ausschneiden, welche den Punkten $a_1\, a_2\, a_3$ innerhalb der zu $a_\varkappa^6$ conjugirten G_6^6 zugehört. Man kann demnach irgend 5 Punkte zu einer conjugirten Form von $a_\varkappa^6$ ergänzen.

F. Construction

der zu einer Form (3n+1)ten Grades $a_\varkappa^{3n+1}$ conjugirten G_{3n+1}^{3n+1} (für n>1)

unter der Voraussetzung:

dass man alle conjugirten Formen einer beliebig gegebenen Form 3nten Grades linear construiren kann.

Die Form $a_\varkappa^{3n+1}$ bestehe aus den Punkten $a_1\, a_2 \ldots a_{3n}\, a_{3n+1}$. Ich bezeichne die binäre Form der Punkte $a_1 \ldots a_{3n}$ mit $b_\varkappa^{3n}$ und die derselben beigeordnete Fläche nter Klasse mit K. Innerhalb der beigeordneten Flächenschaar von $a_\varkappa^{3n+1}$ gehöre zu a_{3n+1} die Fläche K_{3n+1}. Dieselbe wird nach Massgabe des Satzes 32 projectivisch erzeugt durch Zuordnung der Geraden der Schmiegungsebene von a_{3n+1} zu den ersten Polaren, welche die Ebenen eines bestimmten Bündels in Bezug auf K besitzen (damit diese Polaren angebbar seien, musste $n > 1$ vorausgesetzt werden). Da ich nach der oben gemachten Voraussetzung alle conjugirten Formen von $b_\varkappa^{3n}$ construiren kann, so bin ich in der Lage, sämmtliche conjugirte n-Flache von K oder was dasselbe sagt, sämmtliche conjugirte (n—1)-Flache jeder ersten Polaren von K herzustellen; d. h. ich kann für jede Fläche des auftretenden Gewebes sämmtliche conjugirte (n—1)-Flache construiren. Damit ist die Voraussetzung der Aufgabe 34 erfüllt, und ich kann mit Hülfe der in § 10 angegebenen Lösung dieser Aufgabe alle conjugirten n-Flache von K_{3n+1} herstellen, oder, was dasselbe ist, ich kann alle diejenigen Elemente der zu $a_\varkappa^{3n+1}$ conjugirten G_{3n+1}^{3n+1} construiren, welche den Punkt a_{3n+1} enthalten. In derselben Weise aber kann ich die zu a_{3n} resp. a_{3n-1} innerhalb der G_{3n+1}^{3n+1} gehörigen 3n-gliedrigen Gruppen erhalten und damit ist nach B. 2 die Construction der conjugirten G_{3n+1}^{3n+1} überhaupt erledigt.

G. Construction

der zu einer Form (3n+2)ten Grades a_x^{3n+2} conjugirten G_{3n+2}^{3n+2}.

Die Form bestehe aus den Punkten $a_1 \ldots a_{3n+2}$; b_x^{3n+1} sei die binäre Form der Punkte $a_1 a_2 \ldots a_{3n+1}$ und innerhalb der beigeordneten Flächenschaar der letzteren möge dem Punkte a_{3n+2} die Fläche K_{3n+2} zugehören. Anderseits entspreche dem doppelt gezählten Punkte a_{3n+2} innerhalb des beigeordneten Flächengewebes von a_x^{3n+2} die Fläche $K_{3n+2,3n+2}$. Diese letztere wird nach Satz 33 projectivisch erzeugt durch Zuordnung der Geraden der Schmiegungsebene von a_{3n+2} zu den Flächen des Gewebes, welches aus den Polaren der Ebenen des Bündels um den Punkt a_{3n+2} in Bezug auf die Fläche K_{3n+2} besteht. Da man nach F. alle conjugirten Formen von b_x^{3n+1} construiren kann, so kann man auch alle conjugirten n-Flache von K_{3n+2} und mithin auch sämmtliche conjugirte (n—1)-Flache für jede einzelne Fläche des erwähnten Gewebes herstellen. Hierdurch sind wiederum die Voraussetzungen der Aufgabe 34 erfüllt, und man ist mit Hülfe der dort angegebenen Construction in der Lage, alle conjugirten n-Flache von $K_{3n+2,3n+2}$ oder, was dasselbe ist, alle diejenigen Elemente der conjugirten G_{3n+2}^{3n+2} zu construiren, welche den doppelten Punkt a_{3n+2} enthalten. Da dasselbe gilt, sobald man für a_{3n+2} irgend einen anderen Punkt von a_x^{3n+2} eintreten lässt, so ist nach der unter B. 3 gemachten Bemerkung die Construction der G_{3n+2}^{3n+2} erledigt.

H. Construction

der zu einer Form (3n+3)ten Grades a_x^{3n+3} conjugirten G_{3n+3}^{3n+3}.

Besteht die Form aus den Punkten $a_1 a_2 \ldots a_{3n+3}$ und bezeichnet man die binäre Form der Punkte $a_1 \ldots a_{3n+2}$ mit b_x^{3n+2}, so wird die beigeordnete Fläche K von a_x^{3n+3} nach Satz 31 projectivisch erzeugt durch Zuordnung der Geraden der Osculationsebene von a_{3n+3} zu den Flächen des beigeordneten Gewebes der Form b_x^{3n+2}. Da man aber nach G. alle conjugirten Formen b_x^{3n+2} erhalten kann, so ist man auch in

der Lage, für jede Fläche des genannten Gewebes sämmtliche conjugirte n-Flache zu construiren. Die Voraussetzungen der Aufgabe 34 sind dadurch erfüllt und die bekannte Lösung derselben gestattet demnach, alle (n+1)-Flache von K, d. h. alle conjugirten Formen von a_x^{3n+3} herzustellen.

Aus F. G. H. folgt nunmehr: „Die Aufgabe, zu einer Form pten Grades sämmtliche conjugirte Formen zu construiren, ist für $p=3n+1$ $p=3n+2$ $p=3n+3$ gelöst, sobald sie für $p=3n$ gelöst ist“ (wobei $n>1$ sein muss). Da aber diese Aufgabe nach E. für $p=3 \cdot 2=6$ in der That gelöst ist, so darf sie als allgemein gelöst angesehen werden.

Berichtigung.

S. 23, Z. 7 v. o. und
S. 24, Z. 1 v. o. lese man Π statt π.

Lebenslauf.

Ich, Otto Schlesinger, israelitischer Confession, bin geboren am 21. April 1860 zu Tarnowitz, als Sohn des Kaufmanns Simon Schlesinger und seiner Ehefrau Eva geb. Rosin. Meine Eltern sind leider nicht mehr am Leben.

Nachdem ich den ersten Unterricht in einer Privatschule meiner Vaterstadt empfangen hatte, trat ich Ostern 1870 in die ebendaselbst neu errichtete Realschule I. Ordnung ein, welche ich Ostern 1877 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Auf Grund desselben wurde ich im Mai desselben Jahres an hiesiger Universität immatriculirt und beschäftigte mich zunächst mit naturwissenschaftlichen, besonders chemischen Studien in der Absicht, späterhin die practische Chemie zu meinem Beruf zu erwählen. Nach Verlauf von drei Semestern jedoch gab ich diesen Plan auf, um mich hauptsächlich dem Studium der Mathematik zuzuwenden. Ich hörte die Vorlesungen der Herren Professoren: Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Loewig, Meyer, Poleck, v. Richter, Roemer, Rosanes, Schroeter.

Ich benutze diese Gelegenheit, allen genannten Herren meinen aufrichtigen Dank abzustatten. Herrn Professor Rosanes bleibe ich für die Anregnng und gütige Unterstützung bei der vorliegenden Arbeit zu besonders lebhaftem Danke verpflichtet.

Thesen.

1. Die sogenannte „Geometrie der Anzahl“ ist von grosser Bedeutung für die Theorie der Eliminationen; eine umfassende Berechnung und tabellarische Zusammenstellung ihrer einzelnen Resultate ist von geringem wissenschaftlichem Werth.
2. Die kinetische Gastheorie reicht aus, um die Abweichungen der Gase vom Boyle'schen Gesetz zu erklären.
3. Der Unterricht in der Geometrie muss von allen Hülfsmitteln der Anschauung einen möglichst geringen Gebrauch machen.